La réponse d'un système linéaire

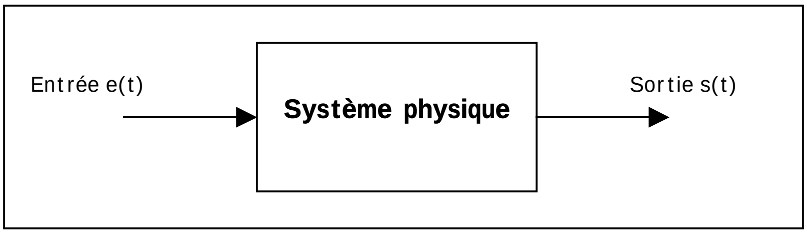
Jean-Philippe MULLER

Décembre 2000

Sommaire

Question 1 : comment décrire le comportement d'un système physique ?

Un système physique quelconque (électronique, électromécanique, pneumatique …) produit une sortie s(t) lorsqu'il est excité par un signal d'entrée e(t).



On se limite dans ce document aux **systèmes linéaires**, ce qui veut dire qu'on va supposer que le système ne comporte aucune non-linéarité comme :

- saturation des amplificateurs
- dispositif à seuil (trigger, relais …)
- seuil de démarrage pour les moteurs …

Cette hypothèse n'est jamais rigoureusement vérifiée, mais simplifie considérablement l'étude mathématique du comportement d'un dispositif.

C'est la raison pour laquelle on commence toujours, quand cela est possible, par négliger ces non-linéarités pour avoir un système linéaire. Dans le cas d'une régulation de chauffage « en tout ou rien » cette approximation n'est évidemment pas possible .

Il y a plusieurs façon des caractériser un système physique linéaire et de décrire sa réponse :

- on applique à l'entrée un signal de forme donnée (impulsion, échelon, rampe …) et on enregistre sa réponse s(t). C'est une technique très utilisée pour démarrer la modélisation d'un système inconnu

- on applique à l'entrée un signal sinusoïdal d'amplitude fixe et de fréquence variable et on relève l'amplitude et le déphasage du signal de sortie. Les données récoltées permettront de tracer le diagramme de Bode (ou de Nyquist) du système et définir sa transmittance complexe
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}$$

- les grandeurs d'entrée et de sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire qui définit entièrement le système. la résolution de cette équation différentielle (qui n'est pas toujours simple !) permet de trouver la réponse s(t) pour une entrée e(t) quelconque :
$$s(t) = K.e(t) + K_1 e'(t) + K_2 e''(t) + \ldots + L_1 s'(t) + L_2 s''(t) + \ldots$$

- définir sa transmittance de Laplace $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$ qui relie la transformée de Laplace de l'entrée E(p) à la transformée de Laplace de la sortie S(p). cette transmittance est un rapport de deux polynômes en p.

Exemple : un système est défini par l'équation différentielle suivante :

$$s(t) = 2.e(t) + 10e'(t) + 3s'(t) + 12s''(t)$$

ce qui devient en prenant la transformée de Laplace de l'équation :

$$S(p) = 2.E(p) + 10pE(p) + 3pS(p) + 12p^2 S(p)$$

soit : $S(p)\left[1 - 3p - 12p^2\right] = E(p)\left[2 + 10p\right]$ et $H(p) = \dfrac{2 + 10p}{1 - 3p - 12p^2}$

Question 2 : que sont les pôles et les zéros d'une transmittance ?

Le numérateur et le dénominateur de cette transmittance peuvent se factoriser et la transmittance de Laplace peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$T(p) = K \frac{(p - z_1)(p - z_2)...(p - z_n)}{(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_m)}$$

Les racines z_i du numérateur :

- sont au nombre de n
- sont réelles ou complexes conjuguées
- s'appellent des zéros

Les racines p_i du dénominateur :

- sont au nombre de m
- sont réelles ou complexes conjuguées
- s'appellent des pôles

La transmittance du système est entièrement déterminée par la constante K , les zéros z_i et les pôles p_i.

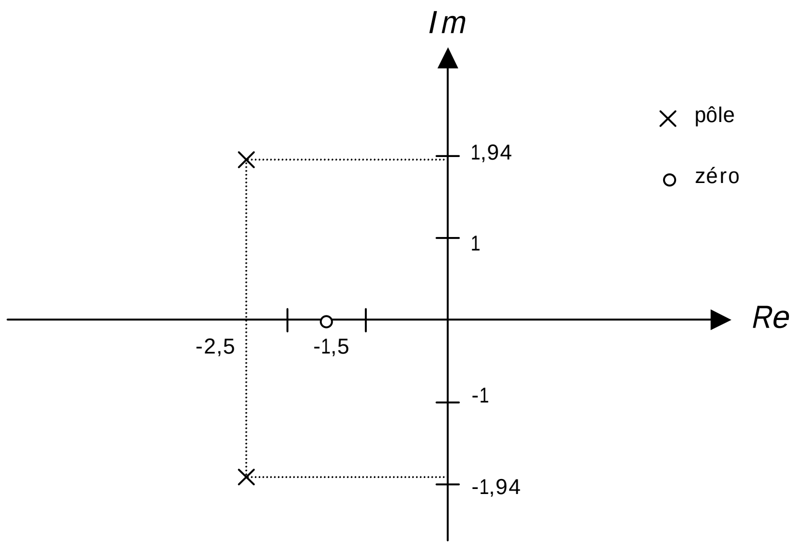
La représentation des pôles et des zéros dans le plan complexe s'appelle **diagramme des pôles et des zéros.**

Exemple : $T(p) = \frac{2p+3}{p^2+5p+10} = \frac{p+1{,}5}{(p+2{,}5-j1{,}94)(p+2{,}5+j1{,}94)}$

Cette transmittance a :

- un zéro **z_1 = -1,5**
- deux pôles complexes conjugués **p_1 = -2,5 – j1,94** et **p_2 = -2,5 + j1,94**

Le diagramme des pôles et des zéros pour cette transmittance T(p) est alors le suivant :



Un système pourra donc aussi être décrit par son diagramme des pôles et zéros.

Question 3 : comment trouver la réponse pour une entrée donnée ?

Nous travaillerons toujours avec des signaux d'entrée nuls avant l'instant t =0 .

D'autre part , le système est toujours supposé initialement au repos .

Par définition, la transformée de Laplace F(p) d'une fonction f(t) s'écrit :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}\,dt$$

Pour trouver l'expression mathématique de la sortie s(t) pour une entrée e(t) donnée, il suffit de faire les opérations suivantes :

- calculer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t)
- calculer S(p) = E(p).T(p) (évident …)
- en appliquant la transformée de Laplace inverse, calculer s(t) à partir de S(p)

Le tableau ci-dessous rappelle les transformées de Laplace de quelques signaux simples et utiles, ainsi que les propriétés les plus importantes de cette transformée.

propriété	**fonction du temps**	**fonction de p**
linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(p)+b.F_2(p)$
dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
translation dans le temps	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
translation en p	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
signal		
échelon	$f(t)=U(t)$	$\frac{1}{p}$
impulsion de Dirac	$f(t)=\delta(t)$	1
rampe	$f(t)=at$	$\frac{a}{p^2}$
exponentielle	$f(t)=e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$

- Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$
- Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$

Remarque : si l'entrée est sinusoïdale, l'utilisation de la transformée de Laplace ne se justifie pas.

si $e(t) = E\cos(\omega_0 t)$ alors $s(t) = TE\cos(\omega_0 t + \varphi)$ avec T : module de $\underline{T}(j\omega_o)$

φ : argument de $\underline{T}(j\omega_o)$

Question 4 : peut-on savoir si un système de transmittance H(p) est stable ?

Pour voir si le système linéaire défini par T(p) est stable, on lui applique une perturbation (impulsion par exemple) et on observe l'évolution de s(t) :

- si s(t) retourne à la valeur 0, on dira que le système est stable
- si s(t) augmente indéfiniment, le système est instable

Dans ce cas, la transformée de Laplace de la tension de sortie s'écrit, puisque E(p) = 1 :

$$S(p) = T(p)E(p) = T(p) \quad \text{avec} \quad T(p) = K\frac{(p-z_1)(p-z_2)...(p-z_n)}{(p-p_1)(p-p_2)...(p-p_m)}$$

Si on décompose cette sortie en éléments simples, on trouve la forme générale de la réponse à une impulsion :

$$S(p) = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + ... + \frac{L_1}{p-m_1+jn_1} + \frac{L_1}{p-m_1-jn_1} + ...$$

où p_i sont les pôles réels et $m_i \pm jn_i$ les pôles complexes conjugués.

En regroupant les termes relatifs aux pôles conjugués, on trouve :

$$S(p) = \frac{K_1}{p-p_1} + \frac{K_2}{p-p_2} + ... + \frac{2L_1(p-m_1)}{(p-m_1)^2+n_1^2} + ...$$

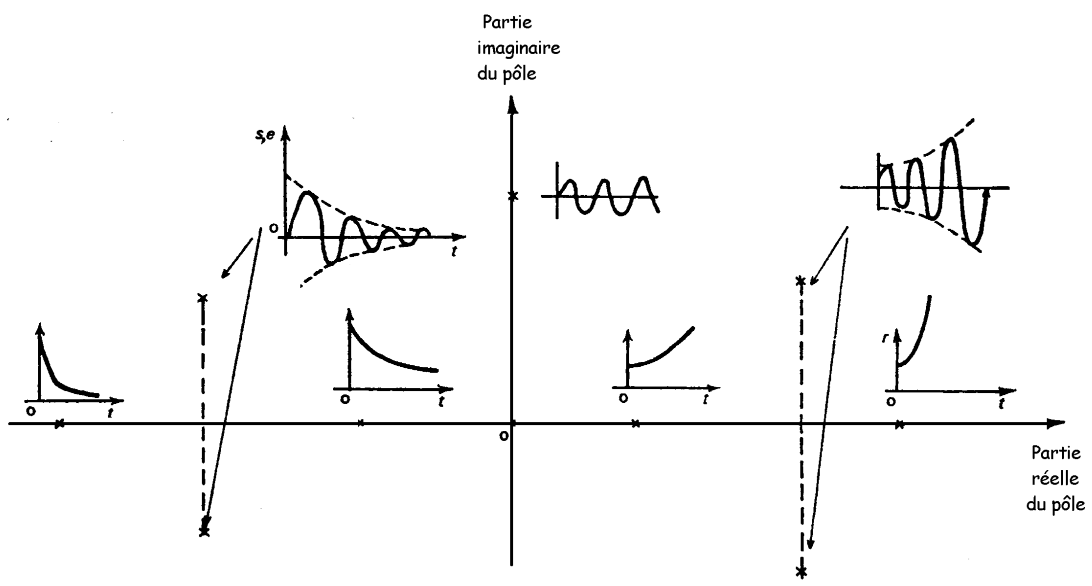
et la sortie s'écrit donc :

$$s(t) = K_1e^{p_1t} + K_2e^{p_2t} + ... + 2L_1e^{m_1t}\cos(n_1t) + ...$$

Pour que la sortie revienne à 0, il faut donc que tous les termes exponentiels soient décroissant, c'est-à-dire que les pôles réels doivent être négatifs, ainsi que la partie réelle des pôles complexes.

Critère de stabilité : Un système est stable si sa transmittance T(p) n'a que des pôles à partie réelle négative, c'est-à-dire situés dans la moitié gauche du plan complexe.

La figure ci-dessous montre la contribution d'un pôle sur la réponse d'un système en fonction de sa place dans le plan complexe.



Question 5 : qu'entend-on par « pôles dominants » d'un système ?

Nous venons de voir que la réponse d'un système linéaire est déterminé par la position de ses pôles dans le plan complexe.

Un système du 10ème ordre a 10 pôles et sa réponse à une impulsion ou à un échelon comprend donc un certain nombre de termes correspondants aux pôles réels et aux paires de pôles complexes conjugués.

Exemple : le système de transmittance $T(p) = \dfrac{1}{(1+p)(1+\frac{p}{6})(1+\frac{p}{22})}$

a 3 pôles réels négatifs : $p_1 = -1$, $p_2 = -6$ et $p_3 = -22$, ce qui permet de dire qu'il est stable.

Sa réponse S(p) à un échelon E(p) = 1/p s'écrit :

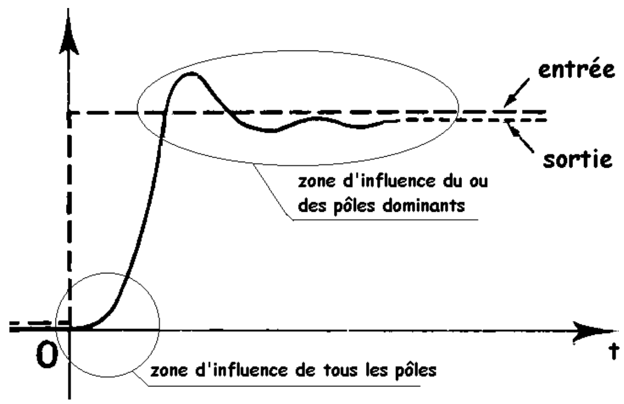
$$S(p) = \frac{1}{p(1+p)(1+\frac{p}{6})(1+\frac{p}{22})} = \frac{1}{p} - \frac{1{,}257}{p+1} + \frac{0{,}275}{p+6} - \frac{0{,}017}{p+22}$$

ce qui correspond à un signal de sortie :

$$s(t) = 1 - 1{,}257e^{-t} + 0{,}275e^{-6t} - 0{,}017e^{-22t}$$

Lorsque le temps s'écoule, ces termes s'éteignent les uns après les autres, les pôles les plus proches de l'origine correspondant aux termes de la réponse qui durent le plus longtemps. On appelle ces pôles les pôles dominants.

La forme de la réponse d'un système dépend essentiellement des pôles dominants qui sont les pôles les plus proches de 0. Les pôles plus éloignés ne jouent que sur la forme du début du régime transitoire.



Ce résultat a deux conséquences pratiques très utiles:

- un système d'ordre élevé a, la plupart du temps, un ou deux pôles dominants et se comporte donc comme un système du 1er ou du 2ème ordre
- on peut simplifier la transmittance d'un système d'ordre élevé en ne conservant que le ou les pôles dominants (en veillant à conserver le gain statique du système !)

Le système ci-dessus se comporte pratiquement comme un 1er ordre de transmittance : $T(p) = \dfrac{1}{1+p}$

Remarques :

- un pôle peut être négliger dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent
- négliger les pôles éloignés de l'origine revient, sur le diagramme de Bode, à négliger les fréquences de coupure élevées

Question 6 : pourquoi les passe-bas sont-ils si importants ?

En dehors des filtres passe-haut, la plupart des systèmes rencontrés dans la pratique ne « suivent » plus aux fréquences élevées et finissent par avoir une fréquence de coupure haute.

Les raisons en sont simples à comprendre :

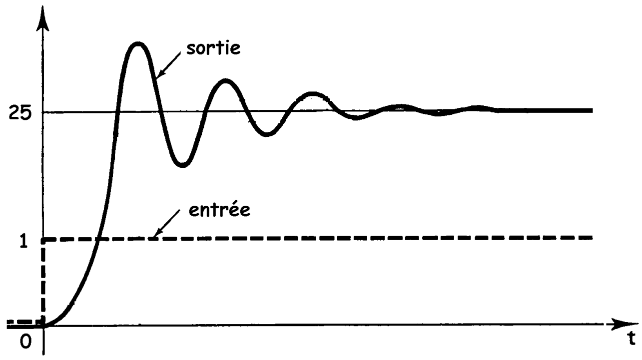
- les composants actifs (transistor, amplificateur opérationnel …) ont toujours une fréquence maximale de fonctionnement
- l'inertie des pièces en mouvement empêche les systèmes mécaniques, électromécaniques ou pneumatiques de suivre aux fréquences élevées

L'étude des systèmes passe-bas a donc une grande importance, tout simplement parce qu'ils sont les plus courants.

Les systèmes passe-bas ont deux propriétés fondamentales :

⇒ **ils ont un gain statique** (amplification en continu)

Si on applique à leur entrée un échelon, la sortie se stabilise à un niveau différent de 0 une fois que le régime transitoire est terminé.



pour ce système, une entrée E = 1 donne une sortie de S = 25, soit une amplification en continu

$$A_0 = S/E = 25$$

⇒ **ils ne « passent » pas les fréquences élevées**

Pour vérifier qu'un système est passe-bas, il suffit de voir si la transmittance T(p) tend vers 0 si p devient très grand. Cela implique que le degré du numérateur est forcément plus faible que le degré du dénominateur.

Cela se voit aussi sur le diagramme de Bode (le module de la transmittance chute aux fréquences élevées) ou sur le diagramme de Nyquist (la courbe finit en 0 lorsque la fréquence augmente).

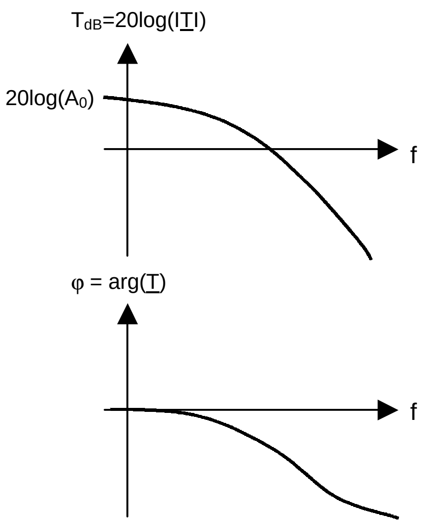


Diagramme de Bode d'un passe-bas

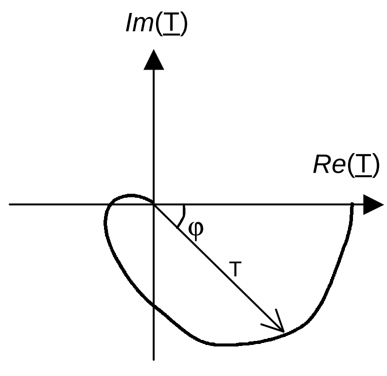


Diagramme de Nyquist d'un passe-bas

Question 7 : comment tracer simplement la réponse d'un 1er ordre ?

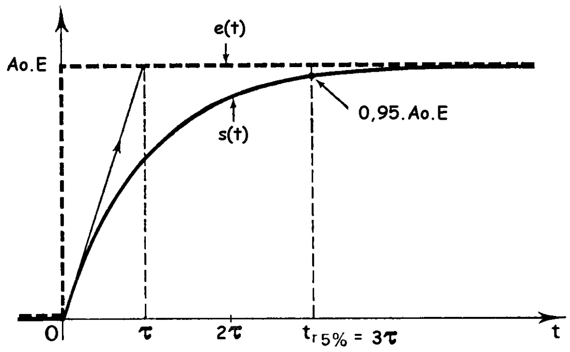
Les systèmes qui ont une réponse de ce type sont ceux qui ont :

- un seul pôle réel négatif
- plusieurs pôles p_1, p_2, p_3 … tels que : p_1 réel négatif et $|p_2|, |p_3| \ldots \gg |p_1|$

⇒ la **transmittance de Laplace** d'un tel système peut toujours se mettre sous la forme « standard » :

$$T(p) = \frac{A_0}{1+\tau p}$$ avec une amplification statique A_0 et une constante de temps τ

⇒ la **réponse à un échelon** d'amplitude E a pour expression : $s(t) = A_0 E(1 - e^{-t/\tau})$

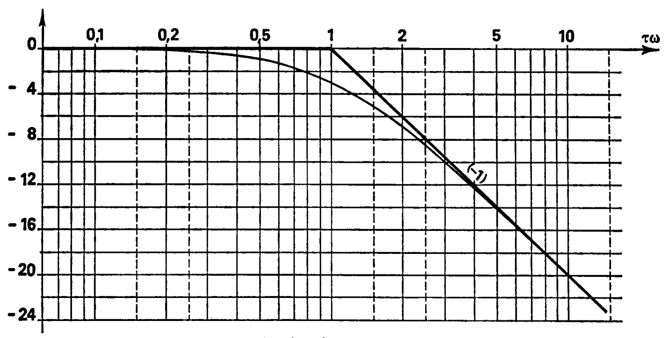


- la tangente à l'origine coupe la valeur finale à t=τ
- le temps de réponse à 5% vaut 3τ

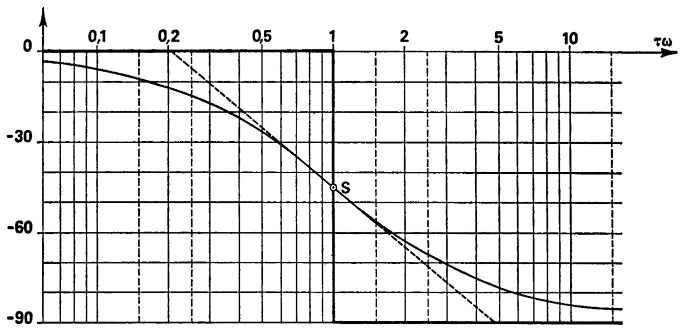
⇒ la **transmittance complexe** s'écrit facilement sous une forme standard classique :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$$ avec une pulsation de coupure $\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$

⇒ le **diagramme de Bode** a l'allure suivante :

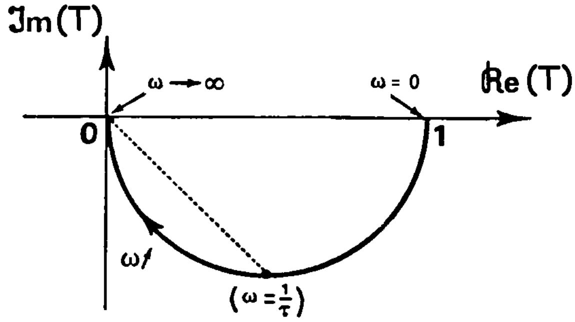


Courbe de gain



Courbe de phase

⇒ le **diagramme de Nyquist** est un cercle :



Question 8 : comment aborder l'étude d'un système du 2ème ordre ?

Un système du second ordre a une transmittance qui s'écrit : $T(p) = \dfrac{a}{b + cp + dp^2}$

Cette transmittance peut toujours être mise sous la forme standard :

$$T(p) = \frac{A_0}{1 + 2m\dfrac{p}{\omega_0} + \dfrac{p^2}{\omega_0^2}}$$

avec

- une amplification statique Ao
- un amortissement m
- une pulsation propre ω_0

Trois cas sont à distinguer suivant la valeur de l'amortissement m :

⇒ si m > 1, la transmittance a deux pôles réels p_1 et p_2

- la transmittance peut donc se factoriser $T(p) = \dfrac{A_0}{(1 - \dfrac{p}{P_1})(1 - \dfrac{p}{p_2})}$

- la réponse à un échelon est de la forme : $s(t) = 1 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$

- le diagramme asymptotique de Bode présente deux cassures

- ce cas n'est pas très intéressant car correspondant à des temps de réponse assez lents

⇒ si m = 1, la transmittance a un pôle double p_0

- la transmittance peut donc se factoriser $T(p) = \dfrac{A_0}{(1 - \dfrac{p}{P_0})^2}$

- la réponse à un échelon est de la forme $s(t) = 1 - e^{p_0 t}(1 + p_0 t)$

- le diagramme asymptotique de Bode présente une cassure double

- ce cas, appelé régime critique, est aussi souvent jugé trop lent

⇒ si m < 1, la transmittance a deux pôles complexes conjugués p_1 et p_2

- les pôles s'écrivent : $p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$ et $p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$

- la transmittance ne peut pas se factoriser

- la réponse à un échelon est de la forme :

$$s(t) = 1 - \frac{e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1 - m^2}}\sin(\omega_1 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \omega_0\sqrt{1 - m^2} \quad \text{et} \quad \cos(\varphi) = m$$

- le diagramme asymptotique de Bode présente une cassure double

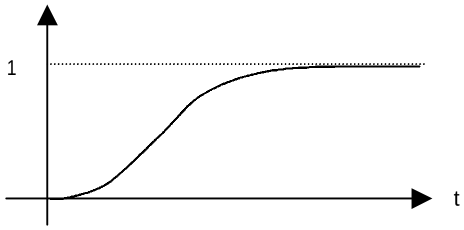
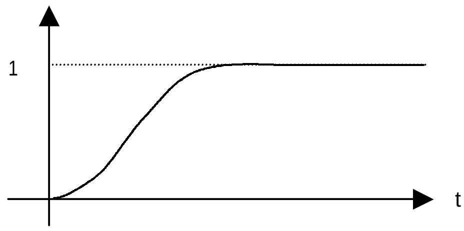
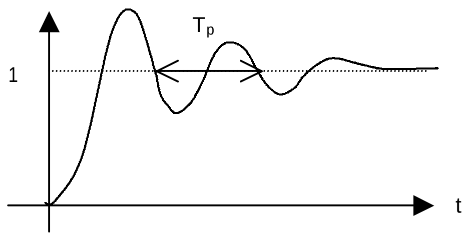
- c'est le cas les plus intéressant dans la pratique, car correspondant à des régimes transitoires de forme intéressante

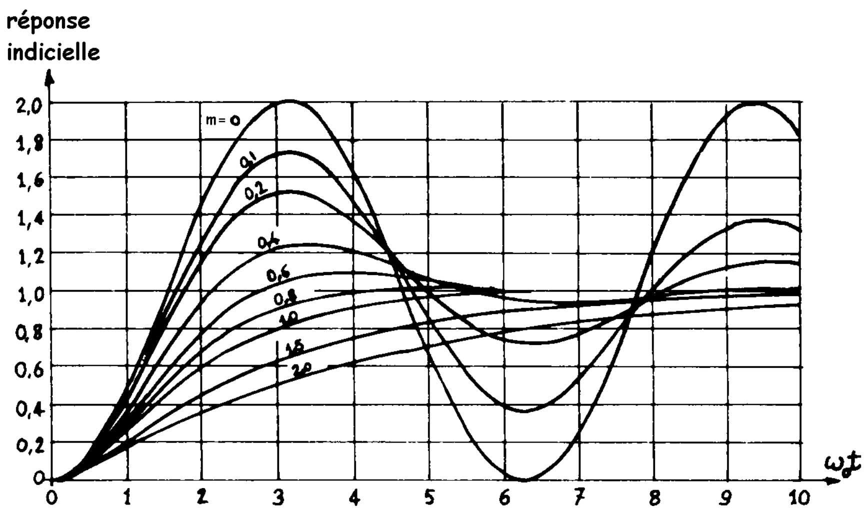
Les allures des réponses indicielles et de Bode de ces différents systèmes du second ordre vont être précisés sur des abaques dans les pages suivantes.

Question 9 : quelles sont les différentes réponses possibles d'un 2ème ordre ?

$$T(p) = \frac{Ao}{1 + 2m\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

A_0 : amplification statique ou en continu
m : coefficient d'amortissement
ω_0 : pulsation propre
To = $2\pi/\omega_0$ période propre

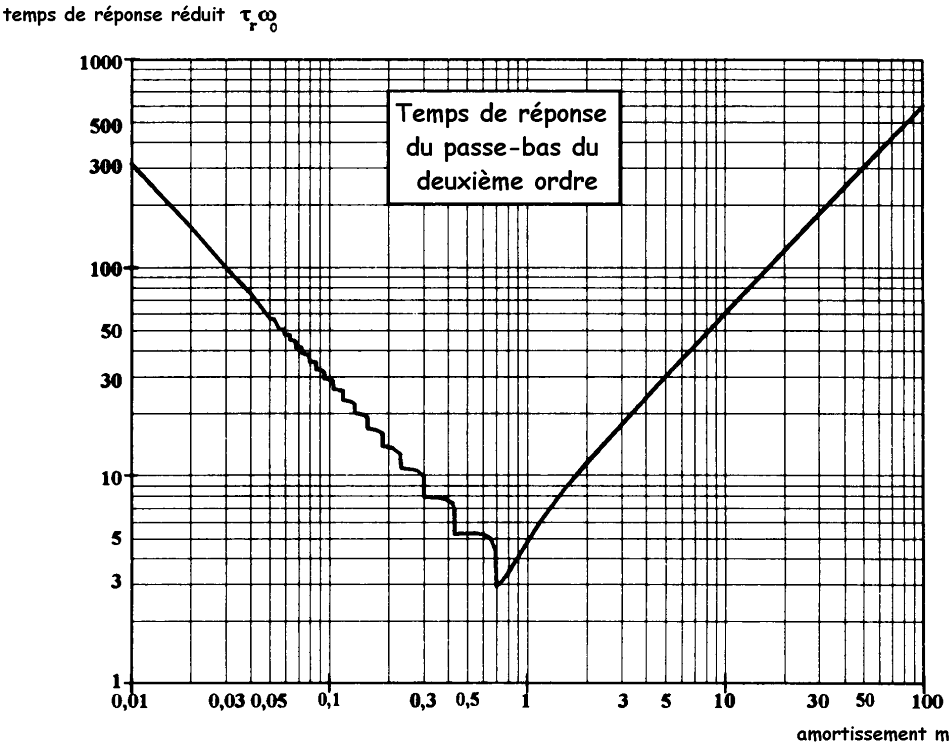
m	caractéristiques	allure
m > 1	- pas de dépassement D = 0 - système très lent si m est élevé - si m>>1 alors $t_{r5\%} = \frac{3mTo}{\pi}$	
m = 1	- pas de dépassement D = 0 - $t_{r5\%} = 0{,}75.To$	
m < 1	- deux valeurs de m utiles : 0,7 et 0,43 - si m = 0,7 on a D = 4% le temps de réponse est minimal $t_{r5\%} = 0{,}45.To$ - si m = 0,43 on a D = 20% le temps de réponse vaut $t_{r5\%} = 0{,}85.To$ - la pseudo-période de l'oscillation vaut : $T_p = \frac{To}{\sqrt{1-m^2}}$	

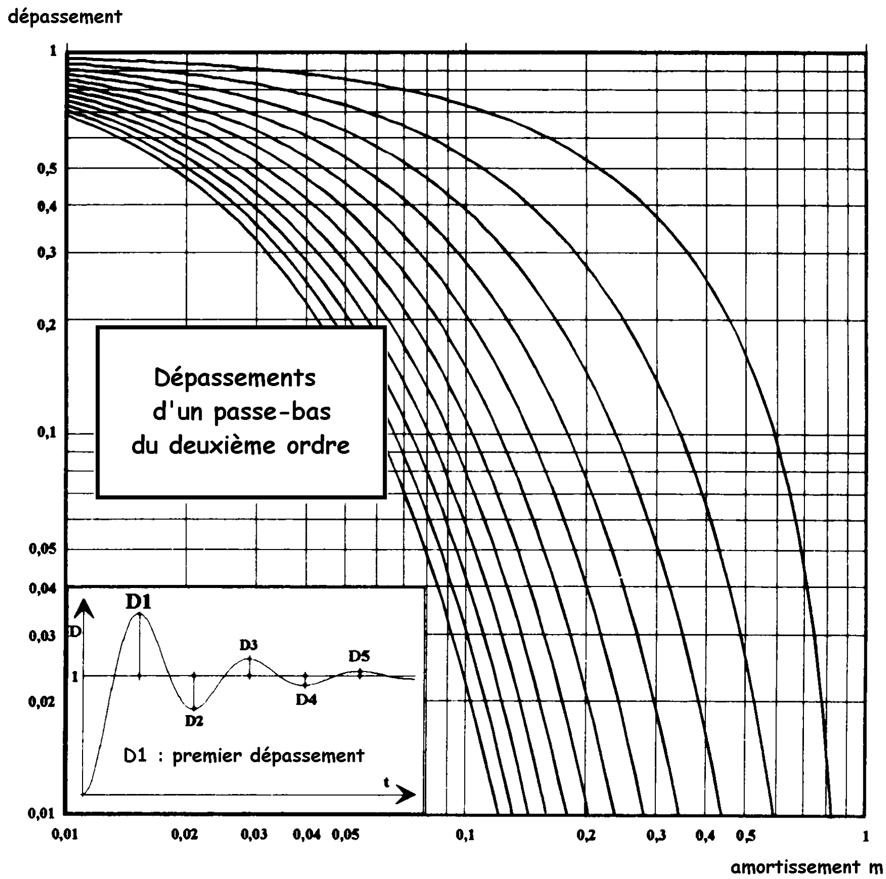


Question 10 : comment trouver temps de réponse et dépassement ?

Pour une valeur d'amortissement m , lire le temps de réponse réduit $\tau_r.\omega_0$ et diviser cette valeur par la pulsation propre pour obtenir le **temps de réponse à 5%** du système.

L'abaque « dépassements » permet de lire directement l'amplitude relative des différents **maxima** du régime transitoire.

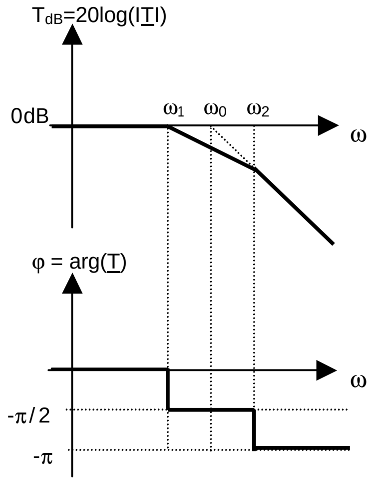
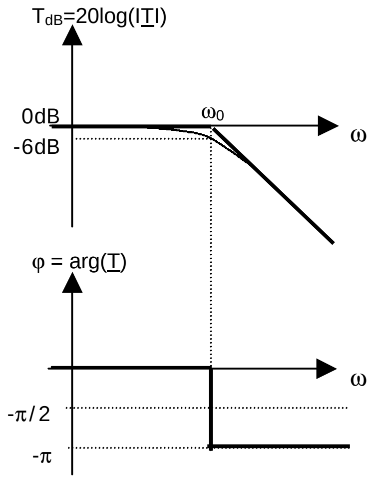
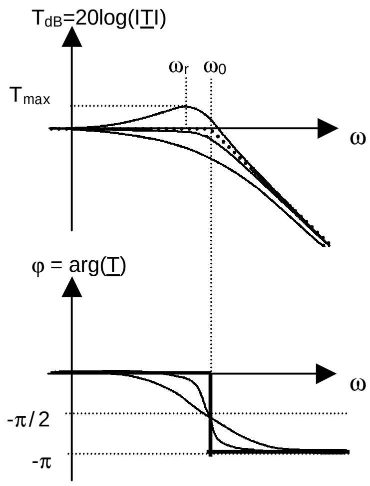




Question 11 : peut-on résumer l'influence de m sur le diagramme de Bode ?

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{Ao}{1 + 2jm\dfrac{\omega}{\omega_0} - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

A_0 : amplification statique ou en continu
m : coefficient d'amortissement
ω_0 : pulsation propre
To = $2\pi/\omega_0$ période propre

m	caractéristiques	allure
m > 1	- la transmittance a deux pôles réels - elle peut donc se factoriser - les racines sont : $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$ et $\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$ avec $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$ $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{Ao}{(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1})(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_2})}$	
m = 1	- la transmittance a un pôle double - elle peut donc se factoriser $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{Ao}{(1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0})^2}$ - à la cassure, le module vaut –6dB	
m < 1	- la transmittance a deux pôles complexes conjugués - elle ne peut pas se factoriser - à la cassure, le module vaut T=1/2m - si m < 0,707 le module passe par un maximum - le maximum est à : $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2m^2}$ - et vaut : $T_{\max} = \dfrac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$ - à chaque valeur de m est liée une courbe de gain et phase particulière	

Question 12 : peut-on trouver H(p) à partir de la réponse indicielle ?

Il est bien-sûr possible d'utiliser les résultats précédents pour établir l'expression d'une transmittance T(p) à partir de l'enregistrement graphique de la réponse impulsionnelle, indicielle ou du diagramme de Bode d'un système.

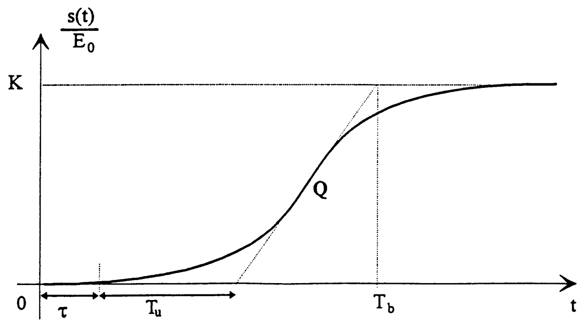
Plusieurs méthodes ont été développées à l'usage des industriels qui ont besoin de connaître la transmittance de leur système (régulation de processus de production chimique par exemple).

La méthode de **Strejc**, par exemple, permet de trouver l'expression de T(p) à partir de sa réponse indicielle, dans le cas où le processus a une fonction de transfert :

- sans pôle à l' origine (pas d' intégrateur)
- sans pôles ou zéros complexes conjugués (pas de dépassement pour la réponse indicielle)
- ayant n constante de temps T
- admettant éventuellement un retard pur τ

La transmittance s'écrit alors : $T(p) = K \dfrac{e^{-\tau p}}{(1+Tp)^n}$

La méthode de Strejc identifie la valeur des paramètres K, τ , n , et T de la fonction de transfert T(p) à partir de l' enregistrement de la réponse indicielle normalisée s(t)/ Eo, Eo étant l' amplitude de l' échelon d'entrée.



En pratique la position du point d' inflexion Q ne peut être déterminée de façon suffisamment précise sur le relevé expérimental. Par contre la tangente au point Q est plus facile à définir.

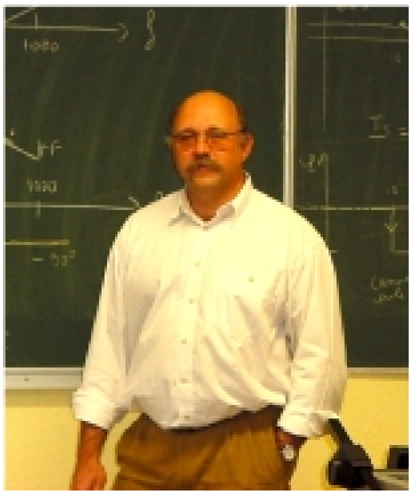
On introduit alors les temps T_u, T_b, et $T_a = T_b - (T_u + \tau)$ et on utilise le tableau suivant :

n	$\dfrac{T_u}{T_a}$
1	0
2	0,104
3	0,218
4	0,319
5	0,410

Utilisation pratique :

a - déterminer K à partir de la valeur asymptotique de s(t)/Eo
b - estimer le retard pur τ en évaluant l'instant où s(t) « décolle » de l'axe
c - tracer la tangente au pont d'inflexion Q et lire T_u et T_b

d - calculer $T_a = T_b - (T_u + \tau)$, puis le rapport $\dfrac{T_u}{T_a}$ et en déduire n à l'aide du tableau



Merci pour l'intérêt que vous portez à mon travail. J'espère que le cours que vous avez téléchargé répond à votre attente.

Si, malgré le soin qui a été apporté à la rédaction de ce document, vous constatez l'existence d'erreurs, merci de me les signaler par Email à jean-philippe.muller1@wanadoo.fr

Techno Assistance Formation
1, rue du Capitaine Pilleux
68720 ZILLISHEIM
Site : http://www.ta-formation.com