



SIGNAUX ANALOGIQUES ET SIGNAUX NUMERIQUES

Le signal physique délivré par un capteur est continu au sens des mathématiques, il est même doublement continu en temps et amplitude. Il est en effet défini pour toute valeur du temps et ne possède aucune discontinuité d'amplitude. Or un signal numérique n'est qu'une suite de nombres ayant un nombre fini, et faible, de décimales, le passage du signal analogique au signal numérique nécessite donc deux ruptures de continuité, en temps, c'est l'échantillonnage, en amplitude c'est la numérisation ou quantification. Nous examinerons successivement ces deux opérations.

ECHANTILLONNAGE

Théorème d'échantillonnage. Repliement de spectre

L'échantillonnage idéal consiste à prélever à des instants précis, le plus souvent équidistants les valeurs instantanées d'un signal.

Le résultat de cet échantillonnage sera noté symboliquement :

$$x_E(t) = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - kT) dt$$

c'est un peigne de Dirac modulé en amplitude par le signal $x(t)$.

On écrit souvent de façon moins rigoureuse :

$$x_E(t) = \sum_k x(kT) \cdot \delta(t - kT) = x(t) \cdot \sum_k \delta(t - kT)$$

C'est un signal analogique non réalisable physiquement, mais c'est à partir de ce modèle que nous établirons les propriétés du signal échantillonné réel.

La transformée de Fourier de la première expression, en utilisant le théorème du retard, à pour valeur :

$$X_E(j2\pi f) = \sum_k x(kT) \cdot \exp(-j2\pi f kT)$$

en posant : $z = \exp(j2\pi f T)$ elle s'écrit $X_E(z) = \sum_k x(kT) \cdot z^{-k}$ c'est la transformée en z du

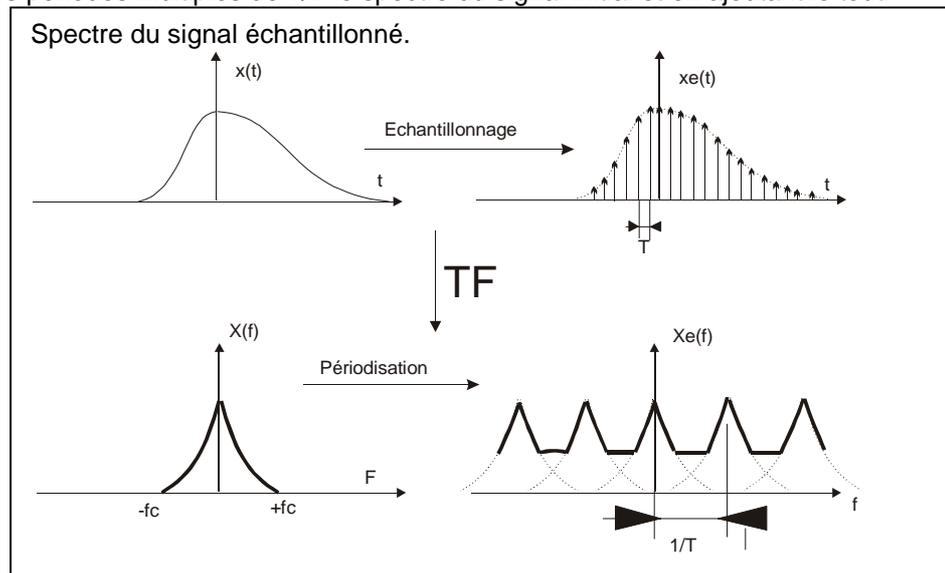
signal x_E , ou plutôt de la suite de valeurs $x(kT)$

En effectuant une transformation de Fourier de la seconde forme de l'expression, il vient :

$$X_E(j2\pi f) = X(j2\pi f) \otimes \frac{1}{T} \sum_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) = \sum_k \frac{1}{T} X\left[j2\pi\left(f - \frac{k}{T}\right)\right]$$

Qui montre que le spectre du signal résultant d'un échantillonnage idéal est obtenu en reproduisant avec des périodes multiples de $1/T$ le spectre du signal initial et en ajoutant le tout.

Ceci est illustré par la figure ci contre.





Pour restituer le signal de départ il est possible d'utiliser un filtre passe bas qui isole une zone de largeur $1/f_c$ autour de l'origine à condition que les lobes ne se chevauchent pas .Ce qui conduit à la condition de Shannon

$$\frac{1}{T} = f_E > 2f_C$$

Un signal peut être reconstitué pour tout t à partir de ses échantillons si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de sa fréquence de coupure. C'est le théorème d'échantillonnage .

Si $f_E > 2f_c$ il y a **sur-échantillonnage** .Alors les motifs successifs obtenus par périodisation du spectre sont disjoints et éloignés l'un de l'autre. Le filtrage passe bas est facilité .

Exemple le signal téléphonique est préalablement filtré pour avoir une fréquence de coupure de 3500Hz , il est échantillonné à 8kHz et non 7 pour faciliter sa restitution.

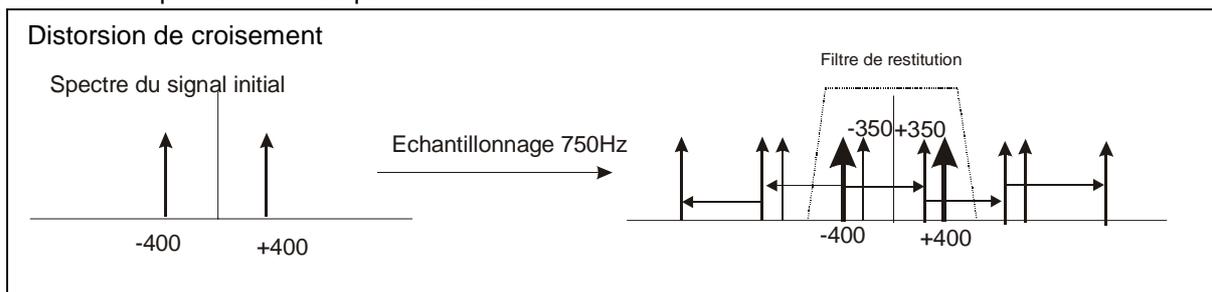
Si $f_E < 2f_c$ les lobes successifs se chevauchent, il y a **sous-échantillonnage** La restitution du signal de départ est impossible , il y a **repliement de spectre** .

Soit par exemple un signal sinusoïdal pur de fréquence 400Hz échantillonné à 750Hz (au lieu de 800) Les deux raies ± 400 hz vont donner par périodisation des raies , de même amplitude , à $-400 \pm k750$ soit $-1150 -400 +350 +1100 \dots$

$+400 \pm k750$ soit $-1100 -350 +400 +1150 \dots$

Un filtrage passe bas de fréquence de coupure un peu supérieure à 400Hz laisse passer une sinusoïde à 400Hz mais aussi une autre , de même amplitude à 350 Hz.

Si le signal initial provient d'un instrument de musique, l'écoute du signal restitué paraît provenir de deux instruments jouant des notes différentes. Ce n'est pas une distorsion car le signal parasite n'est pas un harmonique de l'autre.

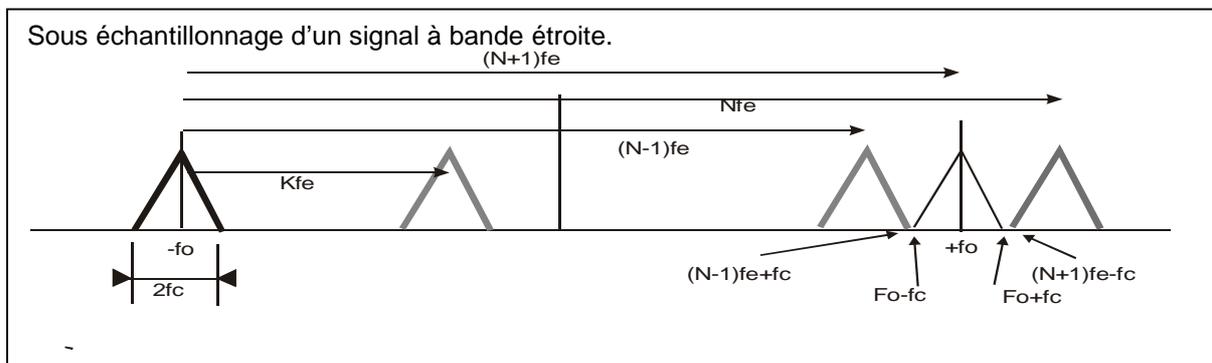


Remarquez combien il est commode de travailler avec des spectres bilatéraux.

Echantillonnage de signaux à bande étroite .

Si un signal à bande étroite est appliqué à un système qui lui fait subir un filtrage passe bande adapté il est possible de l'échantillonner à une cadence très inférieure à celle suggérée par le théorème de Shannon .C'est le cas par exemple d'une porteuse modulée en amplitude.

Considérons en effet le signal dont le spectre est représenté sur la figure suivante . , il est constitué d'une porteuse f_0 et de 2 bandes latérales symétriques de largeur f_c . Le théorème de Shannon imposerait une fréquence d'échantillonnage supérieure à $2(f_0+f_c)$. Mais le résultat de



l'échantillonnage est filtré passe bande par un filtre de largeur $2f_c$ centré sur f_0 .et Il suffit que le spectre soit correct dans cette bande.



Si f_e est la fréquence d'échantillonnage le motif négatif marqué en gras sur la figure est reproduit périodiquement avec des décalages de kf_e . L'un de ces motifs par exemple celui d'indice n peut venir se centrer sur $+f_0$ mais alors les motifs adjacents décalés de $(n\pm 1)f_e$ ne doivent pas toucher à la zone $f_0 \pm f_c$

Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} f_0 = -f_0 + nf_e \\ -f_0 + (n-1)f_e + f_c < f_0 - f_c \\ -f_0 + (n+1)f_e - f_c > f_0 + f_c \end{cases}$$

Les deux dernières inégalités donnent

$$\begin{cases} (n-1)f_e < 2f_0 - 2f_c \\ (n+1)f_e > 2f_0 + 2f_c \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\frac{2f_0 - 2f_c}{n-1} > f_e > \frac{2f_0 + 2f_c}{n+1}$$

à la limite lorsque les deux termes extrêmes sont égaux :

$$n = \frac{f_0}{f_c}$$

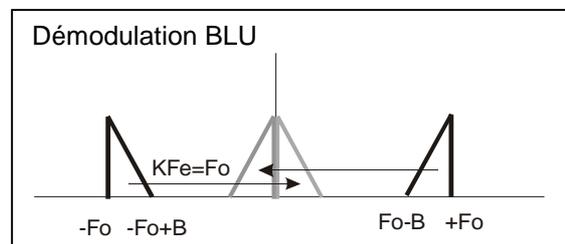
Si ce quotient n'est pas entier on prendra l'entier n immédiatement inférieur. S'il est entier le cas

limite devient , avec $f_e = \frac{2f_0}{n}$ (tiré de la première équation) $f_e = 2f_c$

La fréquence d'échantillonnage limite ne dépend que de la largeur de bande, c'est la même que celle qu'il faut appliquer au signal BF modulant (l'enveloppe) .

Démodulation par échantillonnage

Par échantillonnage il est facile de démoduler une porteuse AM (il suffit de placer l'un des motifs autour de l'origine) ou de restituer le signal modulant à partir d'une porteuse modulée avec bande latérale unique. C'est ce qu'illustre la figure ci contre .

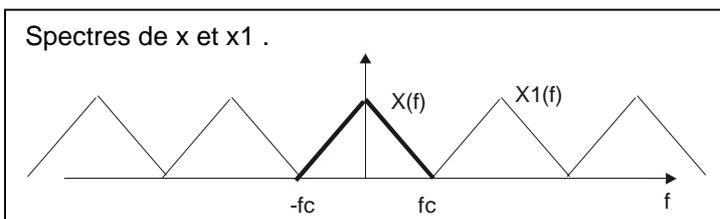


Interpolation

Dans le paragraphe précédent nous avons montré comment il était possible de retrouver les valeurs du signal pour tout t en effectuant un filtrage passe bas du signal échantillonné. Le même résultat peut être obtenu par des opérations dans le domaine temporel , c'est une interpolation entre points successifs.

Interpolateur idéal

Soit $x(t)$ un signal déterministe possédant un spectre $X(f)$ et une fréquence de coupure f_c , c'est à dire que $X(j2\pi f) \equiv 0$ pour $|f| > f_c$



Soit $x_1(t)$ le signal dont le spectre $X_1(j2\pi f)$ est périodique dans le domaine fréquence, de période $2f_c$ et identique à $X(j2\pi f)$ dans l'intervalle $\pm f_c$. X_1 étant périodique (sur l'axe des fréquences) peut être développé en série de Fourier :



$$X_1(j2\pi f) = \sum_n A_n \exp(j2\pi n \frac{1}{2f_c} f)$$

1/2fc est la fréquence sur l'axe f et f la variable.. Avec

$$A_n = \frac{1}{2f_c} \int_{-f_c}^{+f_c} X_1(j2\pi f) \cdot \exp(-jn \frac{2\pi}{2f_c} \cdot f) df = \frac{1}{2f_c} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j2\pi f) \cdot \exp(-jn \frac{2\pi}{2f_c} \cdot f) df$$

or
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j2\pi f) \cdot \exp(j2\pi ft) df$$

par identification :

$$A_n = \frac{1}{2f_c} x\left[-\frac{n}{2f_c}\right]$$

C'est à un coefficient près l'amplitude d'un échantillon. En reportant dans l'expression de x(t) il vient :

$$x(t) = \int_{-f_c}^{f_c} \sum_n \frac{1}{2f_c} x\left[-\frac{n}{2f_c}\right] \cdot \exp(jn \frac{2\pi}{2f_c}) \cdot \exp(j2\pi ft) df$$

soit :

$$x(t) = \frac{1}{2f_c} \sum_n x\left(-\frac{n}{2f_c}\right) \int_{-f_c}^{f_c} \exp\left[j2\pi f\left(t + \frac{n}{2f_c}\right)\right] df$$

mais
$$\int_{-a}^a \exp(j2\pi ft) df = 2a \cdot \frac{\sin(\pi at)}{\pi at}$$

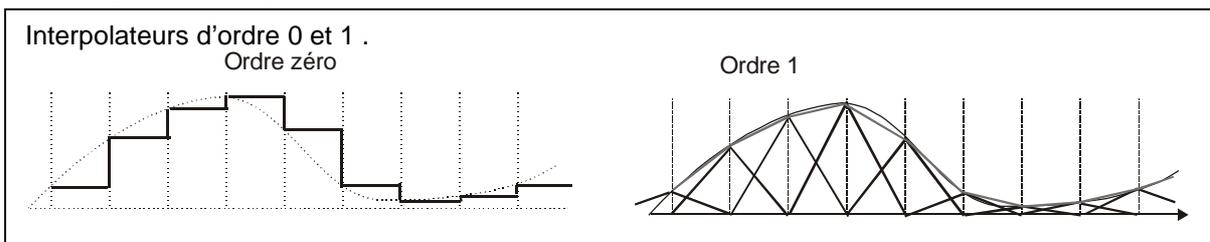
soit dans le cas présent au prix d'un changement de variable n'=-n

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x\left(\frac{n}{2f_c}\right) \cdot \frac{\sin 2\pi f_c \left(t - \frac{n}{2f_c}\right)}{2\pi f_c \left(t - \frac{n}{2f_c}\right)}$$

x(t) est la somme des amplitudes de fonctions en sinus cardinal centrées aux instants d'échantillonnage et dont l'amplitude est celle du signal en chacun des points. La fonction sinus cardinal est l'**interpolateur idéal**. Ces fonctions sinus cardinal forment une base de fonctions orthogonales sur laquelle est développée le signal. Cette méthode d'interpolation est cependant lourde à mettre en œuvre. On préfère des méthodes plus simples, même si elles ne sont pas aussi rigoureuses.

Interpolateur quelconque .

Le sinus cardinal est remplacé par un motif m(t) de transformée de Fourier M(j2πf). L'interpolateur d'ordre zéro fait appel à une fonction rectangle. L'amplitude de l'échantillon est conservée jusqu'à l'échantillon suivant. L'échantillonneur d'ordre 1 effectue une interpolation linéaire entre les points ce qui correspond à un motif triangulaire de largeur ±T



De façon générale le signal reconstruit à partir des échantillons s'exprime par :



$$x_R(t) = \sum_k x(kT)m(t - kT)$$

soit aussi : $x_R(t) = \sum_k x(kT).m(t) \otimes \delta(t - kT) = m(t) \otimes \sum_k x(kT).\delta(t - kT)$

mais le second terme en Σ n'est pas autre chose que le signal échantillonné idéal .Soit finalement :

$$x_R(t) = m(t) \otimes x_E(t)$$

dont la transformée de Fourier est :

$$X_R(j2\pi f) = M(j2\pi f) \cdot \sum_k X\left[j2\pi\left(f - \frac{k}{T}\right)\right]$$

Utilisation d'un sur ou sous échantillonnage .

D'après ce qui précède on pourrait penser qu'il faut toujours respecter le théorème de Shannon , en fait il existe des cas ou son non respect permet de réaliser des fonctions intéressantes.

Oscilloscope à échantillonnage .

Le signal que l'on veut observer est périodique mais de fréquence très élevée , typiquement 1GHz ,On peut le développer en série de Fourier :

$$v_{UHF}(t) = \sum_k a_k \cos n\omega_{UHF}t$$

Echantillonnons le à une fréquence f_E telle que $\omega_E=2\pi f_E=\omega_{UHF}-\omega_{BF}$, ω_{BF} étant de l'ordre du mégahertz Cette fréquence , bien qu'élevée , est beaucoup plus faible que celle qui permettrait une observation de la forme du signal après un échantillonnage direct , pour conserver les 10 premiers harmoniques la fréquence d'échantillonnage devrait en effet être de 20Ghz (au lieu de 999Mhz)

Chaque raie du spectre de v_1 de pulsation $n\omega_{UHF}$ se trouve dupliquée à des fréquences :

$$n\omega_{UHF} + k[\omega_{UHF} - \omega_{BF}] = (n + k)\omega_{UHF} - k\omega_{BF}$$

parmi toutes ces raies l'une d'elles est de fréquence basse, c'est celle qui correspond à $k = -n$, elle à pour pulsation $n\omega_{BF}$ et même amplitude a_n que la raie de départ.

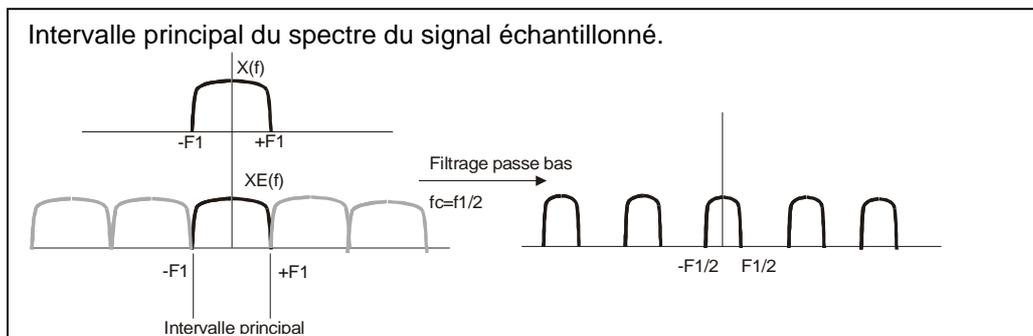
Un filtre isolant les fréquences basses (quelques Mhz) délivrera dont un signal

$$v_{2BF} = \sum_n a_n \cos n\omega_{BF}t$$

qui a exactement la même forme que le signal UHF de départ mais une fréquence de récurrence beaucoup plus faible. Cette méthode n'est pas autre chose qu'une **stroboscopie**.

Filtre de décimation .

Soit un signal de fréquence de coupure f_1 , pour respecter le théorème de Shannon il doit être échantillonné une fréquence au moins égale à $2f_1$.



Le spectre du signal échantillonné est constitué de motifs accolés comme le montre la figure ci dessus. Le motif central qui est le spectre du signal de départ est appelé **intervalle principal**. Ce signal échantillonné mis sous forme numérique subit alors un filtrage numérique passe bas de

fréquence de coupure $f_c=f_1/2$.A la sortie du filtre le spectre est celui représenté à droite sur la figure, son intervalle principal à conservé la même largeur puisque la fréquence d'échantillonnage n'a pas varié, mais il est à moitié vide. Le signal à la sortie du filtre à une fréquence de coupure moitié moins élevée et il pourrait être échantillonné 2 fois moins vite . Il n'est donc pas nécessaire de calculer $2F_1$ points par seconde mais la moitié seulement. Cette réduction de cadence est appelée une **décimation** .

Filtre anti-repliement (aliasing) par décimation

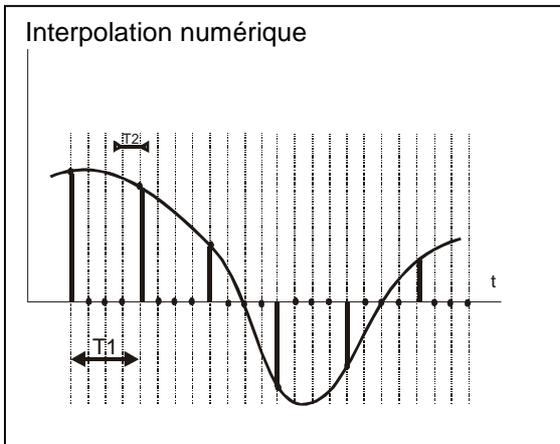
Le signal délivré par un microphone possède des composantes spectrales jusqu'à 15kHz, pour le transmettre sur une ligne téléphonique ,ou la fréquence d'échantillonnage est de 8kHz , il faut lui faire subir un filtrage passe bas de fréquence de coupure inférieure à 4kHz (en pratique on prend 3500Hz) .Ce filtre anti-repliement (aliasing) est souvent analogique, mais l'évolution des techniques numériques permettent d'effectuer cette opération de manière numérique.

Le signal d'entrée est d'abord échantillonné à 32kHz puis numérisé et introduit dans un filtre numérique de fréquence de coupure 3500Hz pour lequel on calcule un point sur 4. (décimation par 4)

Filtre d'interpolation

Soit un signal de fréquence de coupure f_1 échantillonné à raison de $2f_1$ échantillons par seconde , distants de $T_1=1/2f_1$ seconde. Comment à partir de ces seuls points calculer quels seraient les échantillons si l'échantillonnage était 4 fois plus rapide ?

Nous avons vu plus haut qu'il était possible de faire appel à l'interpolateur idéal , mais les calculs seront longs et difficiles car pour calculer un point il faut en théorie faire appel à une infinité de contributions des composantes en sinus cardinal. Mais une méthode numérique très simple est possible .



Soit le signal $y(t)$ qui est décrit par les points d'échantillonnage de x mais complétés par 3 points nuls intercalés.. (figure ci contre) Sa période d'échantillonnage est $T_2=T_1/4$.

$$y_E = \sum_k y(kT_2).\delta(t - kT_2)$$

Sa transformée de Fourier est :

$$Y_E(j2\pi f) = \sum_k y(kT_2).\exp(-j2\pi f k T_2)$$

Mais les seules valeurs de y qui ne sont pas nulles sont celles pour lesquelles k est un multiple de 4 .Posons donc $k=4k'$.l'expression devient

$$Y_E(j2\pi f) = \sum_{k'} y(4k'T_2).\exp(-j2\pi 4k'T_2 f)$$

mais $T_1=4T_2$ et $y(4k'T_2)=x(k'T_1)$

$$\text{Alors : } Y_E(j2\pi f) = \sum_{k'} x(k'T_1).\exp(-j2\pi k'T_1 f) = X_E(j2\pi f)$$

Le signal y à le même spectre que le signal x , mais décrit dans un intervalle principal 4 fois plus large. Si le signal y est soumis à un filtrage passe bas à la cadence T_2 , on obtient les points recherchés.

Retournement de spectre

Que devient le spectre d'un signal si l'on inverse le signe d'un échantillon sur 2 ?

A partir de la suite $x(kT)$ on fabrique la suite $y(kT)=(-1)^k x(kT)$. Le spectre de y est donc :

$$Y_E(j2\pi f) = \sum_k (-1)^k x(kT).\exp(-j2\pi f k T)$$

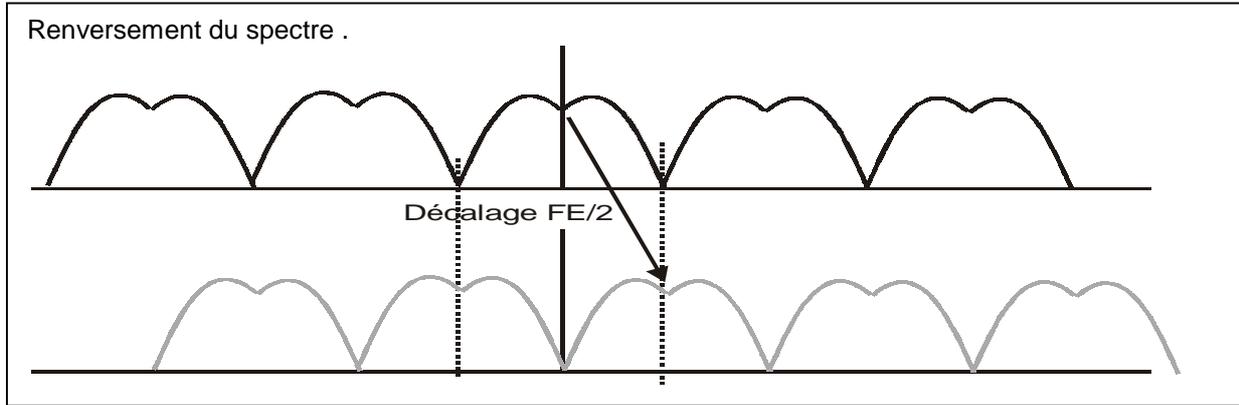


mais

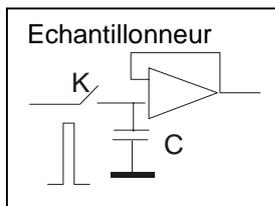
$$-1 = \exp(-j\pi)$$

$$\text{Soit : } Y_E(j2\pi f) = \sum_k x(kT) e^{-jk\pi} \cdot e^{-j2\pi f k T} = \sum_k x(kT) \cdot e^{-j2\pi k (fT + 1/2)}$$

Mais $fT = f/f_E$ le spectre se trouve décalé de $f_E/2$, la figure ci dessous montre que cela correspond à un renversement du spectre dans l'intervalle principal, les composantes haute fréquence sont basculées vers les basses fréquences et inversement.



Influence des imperfections de l'échantillonnage .



Un échantillonneur réel est constitué par une porte analogique K commandée par un train d'impulsions étroites et chargé par un condensateur C (qui peut être la capacité d'entrée de l'amplificateur suiveur.)

Ce dispositif ne délivre pas des impulsions de Dirac mais des signaux rectangulaires de largeur finie τ et dont l'amplitude ne représente pas exactement celle du signal.

Restons d'abord dans le domaine analogique et calculons le spectre de cette suite d'impulsions réelles. Nous nous placerons dans le cadre de deux hypothèses simplificatrices.

1° Les impulsions carrées de largeur τ ont une amplitude exactement égale à celle du signal à l'instant de leur front de montée.

Ce résultat peut être obtenu en faisant suivre un échantillonneur idéal d'un filtre élargisseur dont la réponse impulsionnelle est un signal rectangulaire de durée τ

Or un tel filtre a comme fonction de transfert :

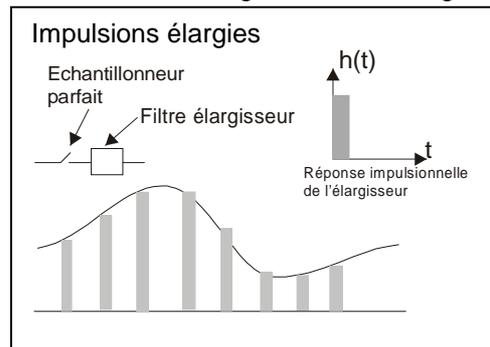
$$H(j2\pi f) = \frac{\sin(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)} \cdot e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}}$$

L'amplitude du spectre du signal élargi est donc celle du signal idéal multipliée par une fonction en sinus cardinal. Il est facile de constater que cet élargissement modifie très peu le spectre, en effet l'effet est nul à fréquence zéro (le sinus cardinal vaut 1) et s'accroît avec la fréquence.

Pour un élargissement considérable $\tau = T_E/2$ à la fréquence limite de Shannon $f = f_E/2$ le terme en sinus cardinal ne vaut que :

$$\frac{\sin(\pi \frac{f_E}{2} \frac{1}{2f_E})}{(\pi \frac{f_E}{2} \frac{1}{2f_E})} = \frac{\sin \pi / 4}{\pi / 4} = 0,9 \text{ soit } -0,9dB$$

Pour un élargissement beaucoup plus faible, l'atténuation est négligeable.

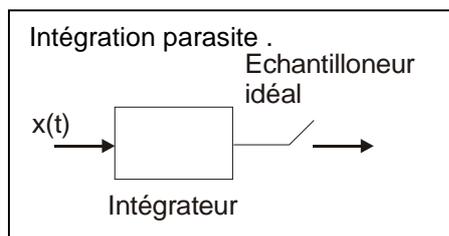
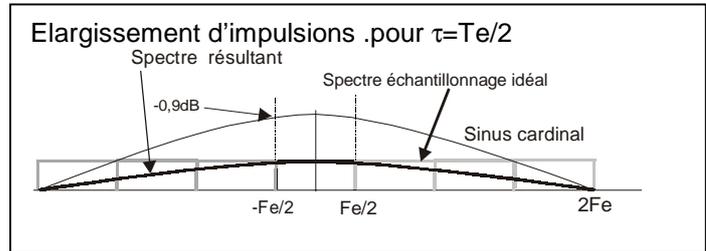




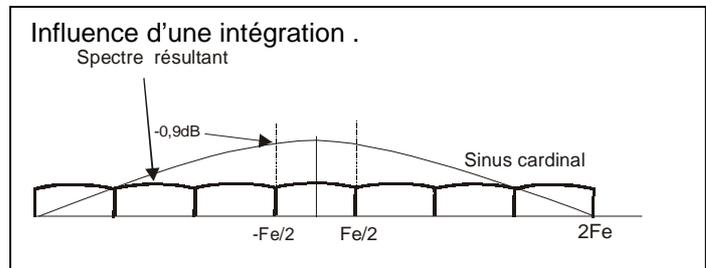
2° Le signal échantillonné est le plus souvent exploité de façon numérique, l'échantillonneur est suivi d'un convertisseur analogique numérique qui délivre un nombre. Ce nombre n'est pas exactement égal à l'amplitude du signal à l'instant d'échantillonnage car le condensateur C de la figure ci dessus ne peut pas se charger en un temps nul . Nous ferons l'hypothèse que la valeur fournie est proportionnelle à l'intégrale du signal pendant la durée τ .C'est à dire :

$$x(kT) = A. \int_{kT-\tau}^{kT} x(t)dt$$

Tout se passe cette fois comme si le signal était soumis avant un échantillonnage idéal à un filtre intégrateur dont les caractéristiques sont décrites par l'équation ci dessus . Or ce filtre a la même réponse impulsionnelle que le précédent donc, comme lui ,une fonction de transfert en sinus cardinal.



La situation est alors très voisine du cas précédent si ce n'est que l'intégrateur modifie très légèrement la forme du spectre qui est , seulement ensuite, périodisée La conclusion est la même.



3° Echantillonnage naturel

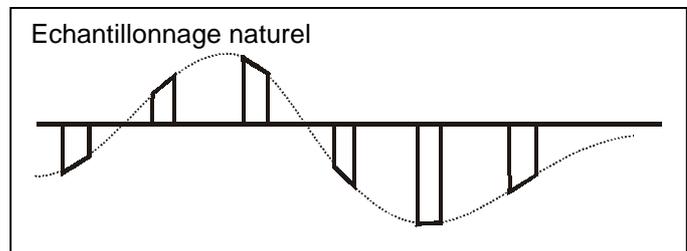
Nous supposons cette fois que les impulsions analogiques envoyées sont des portions de signal . La porte logique s'est contentée de découper le signal d'entrée.

Alors :

$$x_E(t) = x(t). \sum_k \tau \pi_\tau(t - kT)$$

π_τ étant la fonction porte de largeur τ
Qui s'écrit aussi :

$$x_E(t) = x(t). \sum_k \tau \pi_\tau(t) \otimes \delta(t - kT)$$



Par transformée de Fourier , le spectre correspondant :

$$X_E(j2\pi f) = X(j2\pi f) \otimes \left[\tau \sum_k \frac{\sin \pi f \tau}{\pi f \tau} \frac{1}{T} \delta(f - \frac{k}{T}) \right]$$

que l'on peut écrire aussi

$$X(j2\pi f) \otimes \left[\frac{\tau}{T} \sum_k \frac{\sin \pi \tau \frac{k}{T}}{\pi \tau \frac{k}{T}} \delta(f - \frac{k}{T}) \right]$$

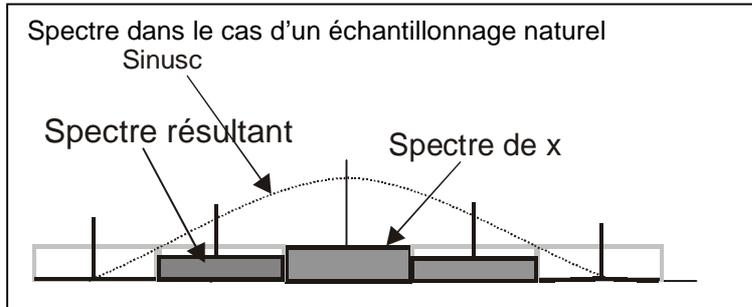
remarquez bien que le terme en sinus cardinal n'est plus une fonction du temps mais une constante .Alors

$$X_E(j2\pi f) = \frac{\tau}{T} \sum_k \frac{\sin \pi \tau \frac{k}{T}}{\pi \tau \frac{k}{T}} . X \left(j2\pi \left(f - \frac{k}{T} \right) \right)$$



Chaque motif périodisé du spectre conserve sa forme initiale mais voit son amplitude multipliée par la valeur du terme en sinus cardinal pour la fréquence centrale du motif. (figure ci dessous)

Exercice : Que se passe t'il si $\tau=T_E$, le signal de sortie est identique au signal initial , il doit en être de même du spectre . En effet le motif central n'est pas touché ($\text{sinc}=1$) et les autres sont nuls car tous les termes en sinus cardinal le sont .($\text{sin}(k\pi)=0$)



QUANTIFICATION

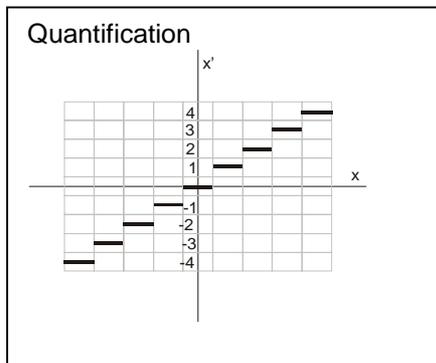
Théorème de quantification

C'est la **conversion analogique numérique** du signal qui transforme une amplitude analogique en un nombre., c'est donc aussi une **mesure** de l'amplitude.

Nous désignerons dans ce qui suit x l'amplitude analogique et x' le nombre résultat de la quantification..

Si q est le pas de quantification on dira que :

$$x' = nq \quad \text{si} \quad nq - \frac{q}{2} < x < nq + \frac{q}{2}$$



Le pas de quantification n'étant pas infiniment petit il y a perte d'information. Par exemple une tension de 3,567678953424678 volts mesurée à $q=1\text{mV}$ près sera notée 3,568 car elle est comprise entre 3,5675 et 3,5685 mais les autres décimales sont perdues.

Lors d'un échantillonnage les valeurs intermédiaires sont calculables sous réserve que le théorème de Shannon soit respecté, on pourrait penser qu'il en est de même ici en choisissant convenablement q , malheureusement il n'est rien, .L'erreur commise $x'-x$ est appelé **bruit de**

quantification elle ne peut pas être supprimée.

Nous retrouverons cependant un théorème ressemblant au théorème de Shannon , mais il porte sur des grandeurs statistiques , plus précisément la densité de probabilité.

Le signal x possède une densité de probabilité $p(x)$.On peut donc écrire :

$$p(x' = n) = p\left(nq - \frac{q}{2} < x < nq + \frac{q}{2}\right) = \int_{nq - q/2}^{nq + q/2} p(x) dx$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\int_{nq - q/2}^{nq + q/2} p(x) dx = q \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \cdot \pi_q(x - nq) dx = q \cdot [p(x) \otimes \pi_q(x)]_{x=nq}$$

$p(x')$ est un peigne de Dirac dont chaque dent a pour amplitude la surface sous la courbe dans un intervalle de largeur q .On parle d'**échantillonnage de surface** .

On écrira :



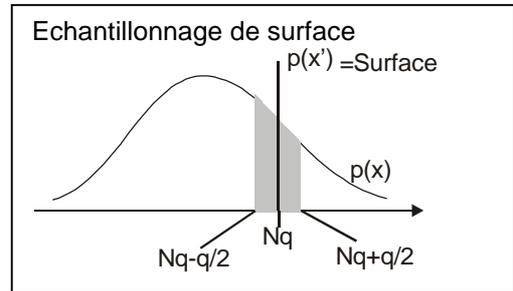
$$p(x') = \sum_k q [p(x) \otimes \pi_q(x)]_{x=nq} \cdot \delta(x'-nq)$$

c'est le résultat de l'échantillonnage de la fonction $p(x) \otimes \pi_q(x)$ avec le pas q .

Nous pouvons alors mener un calcul semblable à celui qui a permis de démontrer le théorème de Shannon.

Introduisons la transformée de Fourier de $p(x)$.

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \exp(-j2\pi\alpha x) dx$$



Cette transformée de Fourier permet de retrouver les moments de la variable x , en effet :

$$\frac{dP(\alpha)}{d\alpha} = -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \exp(-j2\pi\alpha x) dx$$

et sa valeur à l'origine est $(\frac{dP(\alpha)}{d\alpha})_0 = -2\pi j \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = -2\pi j \cdot E(x) = -2\pi j \bar{x}$

de même au second ordre :

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} P(\alpha) = (-2\pi j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \cdot \exp(-j2\pi\alpha x) dx$$

vaut à l'origine :

$$[\frac{d^2}{d\alpha^2} P(\alpha)]_0 = (-2\pi j)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) \cdot dx = -4\pi^2 E(x^2) = -4\pi^2 \overline{x^2}$$

Ainsi la transformée de Fourier de $p(x)$ permet de calculer les moments de x , il doit en être de même pour x' à partir de $p(x')$. Mais lorsque la quantification a été faite on ne connaît que x' , c'est à dire que $p(x')$. Peut on remonter de $p(x')$ à $p(x)$?

Remarquons d'abord que l'on n'utilise que les dérivées de $P(\alpha)$ autour de l'origine, il suffit donc de connaître ce terme autour de $\alpha=0$.

Or $p(x')$ est obtenu en périodisant avec le pas $1/q$ la transformée de Fourier de $p(x) \otimes \pi_q(x)$

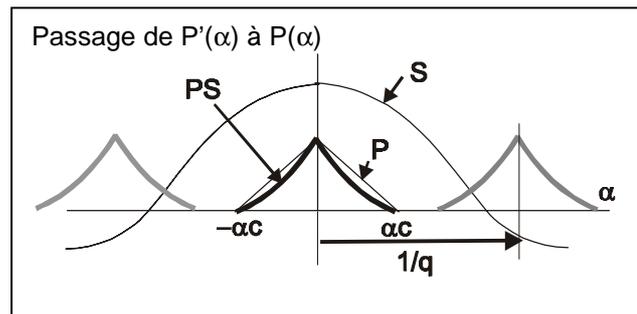
c'est à dire : $P(\alpha) \cdot \frac{\sin(\pi q \alpha)}{(\pi q \alpha)}$,

que nous noterons pour simplifier $P.S$

La figure ci contre montre que les motifs ne se chevauchent pas si :

$$\frac{1}{q} > 2\alpha_c \quad \alpha_c \text{ étant la fréquence de coupure de } P(\alpha).$$

Cependant une condition moins restrictive est possible car le seul point où le recouvrement des motifs ne doit pas se produire est l'origine. La condition devient :



$$P(\alpha) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| > \frac{1}{q} + \epsilon$$

C'est le **théorème de quantification** :

Si un signal à une densité de probabilité $p(x)$ dont la transformée de Fourier est $P(\alpha)$, on peut calculer les moments de x à partir de ceux de x' si l'on choisit un pas

de quantification q de façon à respecter la condition $P(\alpha) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad |\alpha| > \frac{1}{q} + \epsilon$

Il est très difficile d'utiliser ce théorème et surtout d'évaluer l'erreur commise s'il n'est pas respecté. Nous admettrons donc dans la suite qu'il l'est

**Formules de Sheppard.**

Si le théorème est respecté la transformée de Fourier $P'(\alpha)$ à pour valeur autour de l'origine $P'=PS$. En application des expressions précédentes les moments de x' sont alors les suivants :

$$E(x') = \frac{-1}{2\pi j} \left(\frac{dP'}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

or

$$\frac{dP'}{d\alpha} = \frac{d(PS)}{d\alpha} = S \cdot \frac{dP}{d\alpha} + P \frac{dS}{d\alpha}$$

avec $S(0)=1$ $\left(\frac{dS}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0$ il vient alors : $\frac{dP'}{d\alpha} = \frac{dP}{d\alpha}$ donc $E(x')=E(x)$ la quantification ne modifie pas la moyenne.

Il n'en est pas de même de la puissance , en effet :

$$\frac{d^2 P'}{d\alpha^2} = \frac{d}{d\alpha} \left[S \cdot \frac{dP}{d\alpha} + P \frac{dS}{d\alpha} \right] = S \frac{d^2 P}{d\alpha^2} + P \frac{d^2 S}{d\alpha^2} + 2 \frac{dS}{d\alpha} \frac{dP}{d\alpha}$$

A l'origine $S(0)=1$ $dS/d\alpha=0$ $P(0)=1$ le terme double a donc autour de 0 une contribution nulle , il reste .

$$\left(\frac{d^2 P'}{d\alpha^2}\right)_0 = \left(\frac{d^2 P}{d\alpha^2}\right)_0 + \left(\frac{d^2 S}{d\alpha^2}\right)_0$$

mais S se développe en série en

$$S = \frac{\sin \pi q \alpha}{\pi q \alpha} = 1 - \frac{(\pi q \alpha)^2}{3!} + \frac{(\pi q \alpha)^4}{5!} - \dots$$

d'ou

$$\left(\frac{d^2 S}{d\alpha^2}\right)_{\alpha=0} = \frac{-2\pi^2 q^2}{6}$$

Finalement compte tenu des relations citées plus haut :

$$E(x'^2) = E(x^2) + q^2/12$$

Le terme $q^2/12$ est le **bruit de quantification**.

On calculerait de même les moments d'ordre supérieur :

$$m_3 = m_3' - \frac{1}{4} m_1' q^2 \quad m_4 = m_4' - \frac{1}{2} m_2' q^2 + \frac{7}{240} q^4$$

Ce sont les formules de Sheppard.

Cas particulier d'une Gaussienne.

La transformée de Fourier d'une densité de probabilité gaussienne est

$$P(\alpha) = \exp(-4\pi^2 \alpha^2 \frac{\sigma^2}{2})$$

cette fonction diminue très vite si α augmente . Pour $2\pi\alpha\sigma=3$ P est tombé à moins de 1%. Si nous considérons comme nulles les valeurs inférieures à 1% on peut écrire :

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{pour} \quad 2\pi\alpha\sigma > 3 \quad \text{soit} \quad \alpha > \frac{3}{2\pi\sigma} \approx \frac{1}{2\sigma}$$

ce qui conduit à choisir $q=2\sigma$.Il s'agit là d'une quantification très grossière puisque pour une gaussienne la probabilité d'avoir $|x|<\sigma$ est de 69%. Une Gaussienne supporte donc une quantification très grossière. Remarquons que nous avons placé la barre à 1% et qu'il est très difficile de calculer l'erreur que cela entraîne. Elle est bien inférieure à ce 1%.



Quantification et corrélation

Dans quelles mesure la quantification influe t'elle sur la précision du calcul d'une fonction d'autocorrélation, c'est ce que nous proposons d'étudier.

La fonction d'autocorrélation à pour expression :

$$R_x(\tau) = E(x(t).x(t - \tau))$$

c'est la moyenne d'une variable $y(t) = x(t).x(t - \tau)$

Pour cette variable on peut définir une densité de probabilité à 2 dimensions :

$$p[x(t), x(t - \tau)]$$

dont la transformée de Fourier après quantification ,par un raisonnement analogue au précédent , est de la forme

$$P'(\alpha, \alpha') = \sum_k \sum_{k'} P(\alpha, \alpha') \frac{\sin(\pi q \alpha)}{\pi q \alpha} \frac{\sin(\pi q \alpha')}{\pi q \alpha'} \delta(x'_i - kq) . \delta(x'_{i-\tau} - k'q)$$

Le raisonnement est identique au précédent, on peut retrouver $P(\alpha, \alpha')$ à partir de $P'(\alpha, \alpha')$ si $P(\alpha, \alpha')$ est identiquement nul à l'extérieur d'un carré de coté $1/q$ Alors :

$$E(x'_i x'_{i-\tau}) = E(x_i x_{i-\tau}) \quad \text{donc} \quad R_x(\tau) = R_{x'}(\tau)$$

La quantification n'introduit aucune erreur sur le calcul de la fonction d'autocorrélation sauf bien sûr pour $\tau=0$, l'écart pour ce point étant le bruit de quantification.

Mais on peut écrire $x'=x+b$ b étant le bruit de quantification. Alors :

$$R_{x'}(\tau) = [x(t) + b(t)].[x(t - \tau) + b(t - \tau)] = R_x(\tau) + R_{x_b}(\tau) + R_{b_x}(\tau) + R_b(\tau)$$

mais $R_x=R_{x'}$ il en découle que :

$$R_{x_b}(\tau) + R_{b_x}(\tau) + R_b(\tau) = 0$$

Cette relation étant satisfaite pour tout τ chacun des 3 termes doit être nul ; il en découle deux conséquences fondamentales

$R_{x_b}=R_{b_x}=0$ bruit de quantification et signal ne sont pas corrélés.

$R_b=0$ le bruit est blanc