

Dept GEII IUT Bordeaux I

TRANSFORMEES de FOURIER NUMERIQUE

et

DISCRETE (FAST FOURIER TRANSFORM)

APPLICATIONS

(Vol. 4)

G. Couturier

Tel : 05 56 84 57 58

email : couturier@elec.iuta.u-bordeaux.fr

Sommaire

I- Transformée de Fourier numérique

II- Transformée de Fourier discrète

II-1- les fenêtres d'analyse

Transformées de Fourier numérique et discrète : FFT (Fast Fourier Transform) Applications

Nous avons montré précédemment l'intérêt de la transformée de Fourier pour obtenir par exemple la réponse en fréquence $H(f)$ d'un système. Le calcul de la transformée de Fourier pose cependant un certain nombre de problèmes, en effet un ordinateur ne peut traiter que des signaux numériques, ceux-ci sont obtenus après un *échantillonnage* et une *quantification*. Par ailleurs la mémoire d'un ordinateur est forcément limitée, il s'ensuit que le calcul porte sur un nombre de points limités.

Dans cette partie on se propose de passer en revue l'ensemble des problèmes posés par l'utilisation de la transformée de Fourier discrète.

I- Transformée de Fourier numérique

On rappelle que la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$ continu dans le temps s'écrit :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

Après échantillonnage de $x(t)$, on obtient les échantillons $x(nT_e)$ où T_e est la période d'échantillonnage. Nous avons vu précédemment que le spectre du signal échantillonné était périodique, de période égale à $F_e = 1/T_e$, et que son module était pair. D'un point de vue mathématique la transformée de Fourier $X_1(f)$ des échantillons $x(nT_e)$, appelée transformée de **Fourier numérique**, s'écrit :

$$X_1(f) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(k)e^{-j\omega k T_e} \quad (2)$$

NB : pour simplifier l'écriture on écrit $x(k)$ à la place de $x(kT_e)$, ce qui sous entend un échantillonnage à la fréquence $F_e = 1/T_e$.

On vérifie bien que $X_1(f)$ est une fonction périodique de période F_e , en effet si on remplace f par $(f+MF_e)$ on obtient toujours le même résultat :

$$e^{-j2\pi(f+MF_e)kT_e} = e^{-j2\pi f k T_e} e^{-j2\pi M F_e k T_e} = e^{-j2\pi f k T_e} e^{-j2\pi M k} = e^{-j2\pi f k T_e}$$

Par ailleurs, on remarque que les parties réelle et imaginaire de $X_1(f)$ sont respectivement des fonctions paire et impaire de la variable f , il s'ensuit que le module de $X_1(f)$ est également une fonction paire de la variable f . La périodicité de $X_1(f)$ résulte de l'échantillonnage, c'est un résultat que nous avons déjà obtenu en étudiant la théorie de l'échantillonnage.

Avec un ordinateur il est impossible de calculer $X_1(f)$ pour k allant de $-\infty$ à $+\infty$, en effet il faudrait une mémoire infinie. En pratique, le nombre d'échantillons est limité à N par exemple, on ne calcule donc pas $X_1(f)$ mais $Z(f)$ qui s'écrit alors :

$$Z(f) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k)e^{-j\omega k T_e} \quad (3)$$

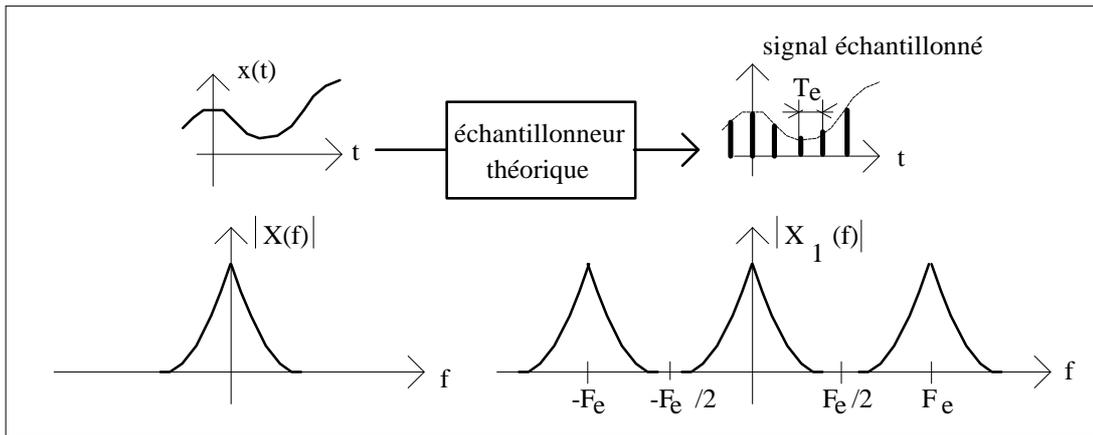


Fig. 1 Transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal continu dans le temps et transformée de Fourier numérique d'un signal échantillonné

Les $z(k)$ échantillons sont obtenus en multipliant les $x(k)$ échantillons par les $y(k)$ échantillons d'un **fenêtre d'analyse** (ou encore fenêtre de pondération). Les $y(k)$ échantillons de la fenêtre d'analyse sont nuls pour $k < 0$ et $k > (N-1)$; $z(k) = x(k)y(k)$.

La fenêtre d'analyse la plus simple est la **fenêtre rectangulaire** (rectangular window ou boxcar en anglais) dont les échantillons notés $y_R(k)$ sont tels que :

$$y_R(k) = 1 \text{ pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } (N-1)$$

$$y_R(k) = 0 \text{ pour } (N-1) < k < 0$$

Dans ce cas particulier, $Z(f) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k)e^{-j\omega k T_e} = \sum_{k=0}^{k=N-1} x(k)e^{-j\omega k T_e}$. La fig. 2 montre le cas d'un fenêtre rectangulaire appliquée sur des échantillons $x(k)$.

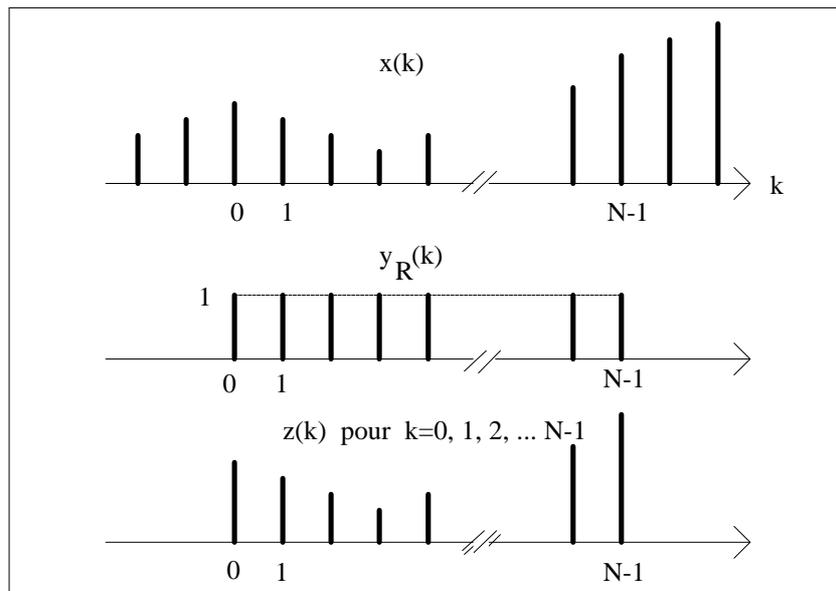


Fig. 2 Pondération des échantillons $x(k)$ par les échantillons $y_R(k)$ d'une fenêtre rectangulaire

II- Transformée de Fourier discrète

Avec un ordinateur (ou un oscilloscope numérique), il est impossible de calculer $Z(f)$ pour une valeur quelconque de la fréquence f . Comme $Z(f)$ est périodique, de période F_e dans l'espace des fréquences, on découpe l'intervalle F_e en N parties égales et on ne calcule $Z(f)$ que pour les multiples de F_e/N comme le montre la Fig. 3, on vient ainsi d'introduire la **transformée de Fourier discrète**. On note $Z(n)$ les composantes de la transformée de Fourier discrète; $Z(n) = Z(f)$ calculé pour $f = nF_e/N$ avec $n = 0, 1, \dots (N-1)$. L'indice n est référencé comme le canal.

$$Z(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k) e^{-j2\pi n \frac{F_e}{N} k T_e} = \sum_{k=0}^{k=N-1} z(k) e^{-j2\pi nk/N} \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots (N-1) \quad (4)$$

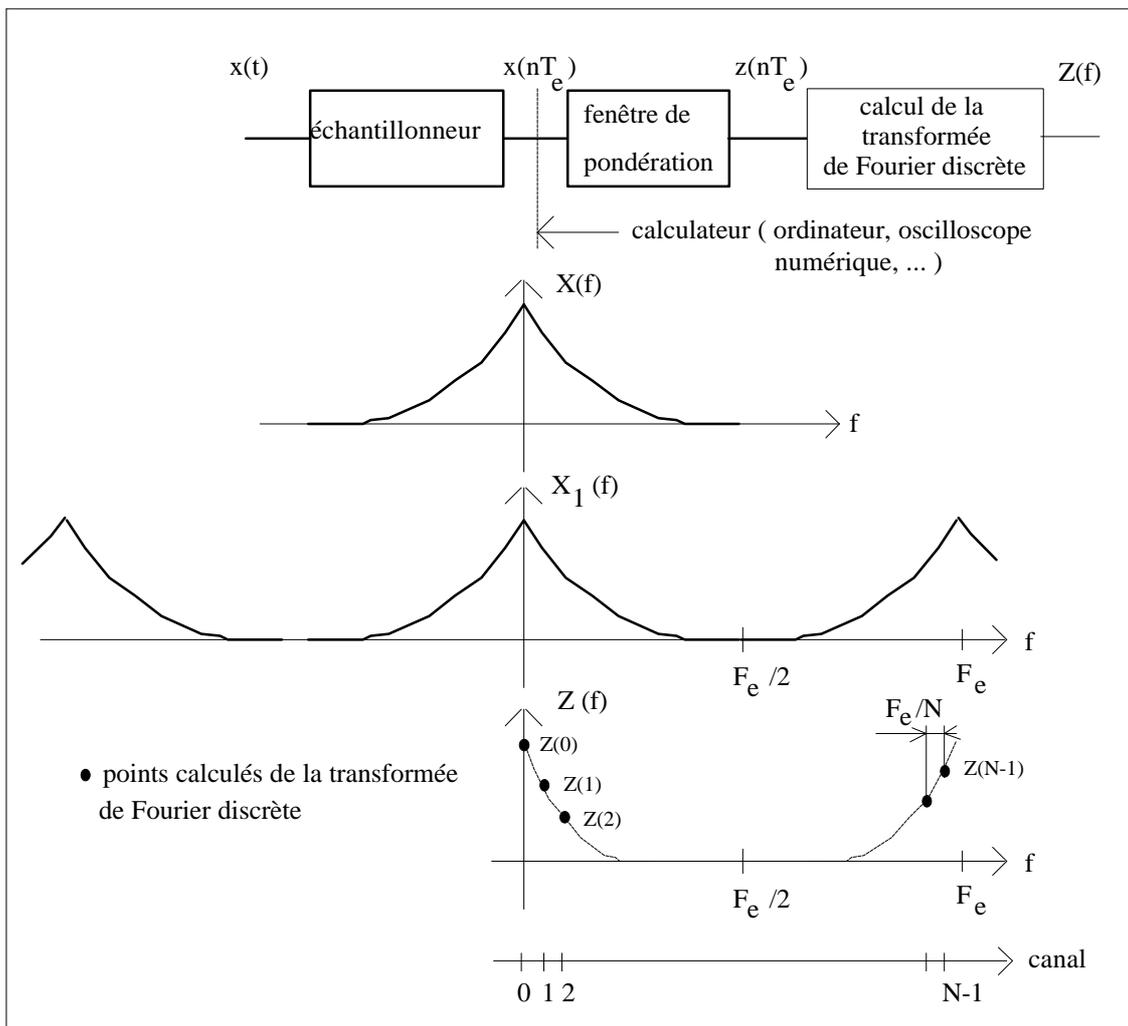


Fig. 3 Transformées de Fourier numérique et discrète

Le calcul des $Z(n)$ ne pose pas a priori de problèmes majeurs, pour obtenir une valeur particulière de $Z(n)$ il faut effectuer $2N$ multiplications (N multiplications pour la partie réelle et N multiplications pour la partie imaginaire) et $2(N-1)$ additions. Pour obtenir les N valeurs

de $Z(n)$ il faut donc $2N^2$ multiplications et $2(N-1)N$ additions. Le temps de calcul est d'autant plus long que le nombre de points d'acquisition est élevé, et on arrive très vite à des temps de calcul très longs de l'ordre de quelques millisecondes pour 1000 points (cas d'un processeur à 300 MHz avec 5 cycles machine pour une multiplication). Dans le cas où le nombre de points d'acquisition N est une puissance de deux ($N=2^n$), on dispose d'algorithmes de calcul très rapide ramenant le nombre de multiplications à : Nn . Ces algorithmes portent le nom de **FFT** (Fast Fourier Transform). L'algorithme le plus connu est celui de Cooley-Tuckey. Le nombre de multiplications est donc divisé par $2N/n$ (exemple : si $N = 1024 = 2^{10}$, le nombre de multiplications est divisé grosso modo par 200 ramenant le temps de calcul à quelques microsecondes). Sans l'introduction d'algorithmes de calcul rapide, la transformée de Fourier discrète serait probablement restée un objet mathématique sans grand intérêt.

Remarque: Dans un algorithme de FFT, les composantes $Z(n)$ sont obtenues simultanément en fin de calcul, il faut donc réaliser les Nn multiplications même si seulement P composantes sont intéressantes. Dans le cas d'un algorithme de calcul n'utilisant pas la FFT (on parle alors de DFT pour Direct Fourier Transform), le calcul des $Z(n)$ est indépendant, c'est à dire que l'on peut décider de calculer par exemple $Z(2)$ et $Z(5)$ sans calculer $Z(1)$, $Z(3)$, $Z(4)$, Pour obtenir P composantes de $Z(n)$, il faut donc réaliser $2NP$ multiplications. Pour savoir si un algorithme de FFT s'impose, il faut donc comparer Nn et $2NP$, (exemple : si $N = 1024$ un algorithme de FFT s'impose à partir de $P = 5$).

Remarque: Si le nombre de points d'acquisition n'est pas une puissance de deux, on a intérêt à compléter la longueur de l'enregistrement par des zéros afin de pouvoir utiliser un algorithme de FFT, cette technique porte le nom de technique de remplissage (zero padding en anglais), (exemple : $N = 1000$, on fait $z(k) = 0$ pour $k = 1000, 1001, 1002, \dots, 1023$). Le remplissage par des zéros ne modifie pas $Z(f)$, par contre le pas de calcul dans l'espace des fréquences devient $F_e/1024$ et non plus $F_e/1000$. Dans le cas précédent, on pourrait être tenté de tronquer la suite des échantillons pour ramener leur nombre à 512 et gagner ainsi en temps de calcul. Cette dernière opération conduit à modifier les $Z(n)$ si les échantillons $z(k)$ sont différents de zéros pour k allant de 512 à 999.

En supposant régler le problème du calcul des $Z(n)$, on peut se demander si les composantes $Z(n)$ sont bien égales aux valeurs de $X_1(f)$ calculées pour $f = nF_e/N$. Analysons les cas les plus fréquemment rencontrés.

1^{er} cas : les échantillons $x(k)$ sont nuls pour $(N-1) < k < 0$, dans ce cas $Z(f) = X_1(f)$ et les $Z(n)$ sont bien égaux aux $X_1(f)$ calculés pour $f = nF_e/N$.

Pour illustrer ce cas, intéressons nous au problème du relevé de la réponse en fréquence $H(f)$ d'un système linéaire du deuxième ordre dont le schéma électrique est donné à la Fig. 4.

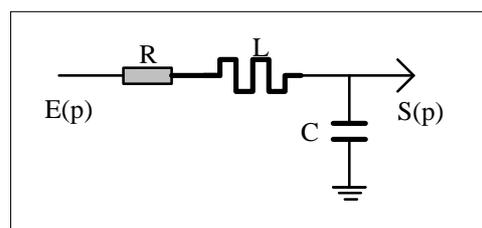


Fig. 4 Schéma électrique d'un système du second ordre

La fonction de transfert $H(p)$ d'un tel système s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \frac{p\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \quad \text{avec } LC\omega_0^2 = 1 \text{ et } Q = L\omega_0 / R \quad (5)$$

La réponse en fréquence est donnée par : $H(f) = H(p)|_{p=j2\pi f} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$,

elle présente un maximum pour une fréquence voisine de f_0 , d'autant plus proche de f_0 que le facteur de surtension Q est élevé. Dans un tracé $\{20\log_{10}|H(f)|, \log_{10}f\}$, la pente est de -40dB/décade lorsque $f \rightarrow \infty$.

La réponse impulsionnelle $h(t)$ est une sinusoïde amortie, elle s'écrit :

$$h(t) = U(t) \frac{2\omega_0 Q e^{-\omega_0 t / 2Q}}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin\left(\frac{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q} t\right).$$

Dans l'exemple traité, la fréquence de résonance f_0 est égale à 2.7 kHz et le facteur de surtension $Q = 2.8$.

La réponse en fréquence $H(f)$ peut être obtenue soit par une analyse harmonique soit encore à partir de la réponse impulsionnelle ou de la réponse indicielle. Dans ce qui suit on s'intéresse à ces deux dernières méthodes qui font appel à la transformée de Fourier.

α) cas où $H(f)$ est obtenu à partir de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est obtenue en excitant le système par une impulsion de largeur $\theta = 1 \mu s$. En toute rigueur, on ne peut dire que la réponse du système soit égale à $h(t)$ car l'impulsion est de largeur finie. Pour tenir compte de ce point, on note $x(nT_e)$ et non $h(nT_e)$ les échantillons de la réponse à l'impulsion de largeur θ .

Avec une largeur d'impulsion $\theta = 1 \mu s$, on peut raisonnablement espérer obtenir $H(f)$ jusqu'à environ 100 kHz ($1/\theta = 1$ MHz). On analyse par la suite le cas où le système est attaqué par une impulsion de largeur $\theta = 200 \mu s$.

Les échantillons $x(nT_e)$ de la réponse impulsionnelle sont représentés sur la Fig. 4 (sur cette figure on observe une courbe continue et non des points, les points sont reliés entre eux par des segments de droite afin d'en faciliter la lecture).

NB : La fréquence d'échantillonnage F_e est fixée à 2 MHz. Dans l'expérience, on n'utilise pas de filtre antirepliement. Compte tenu de F_e il faudrait en principe un filtre avec une fréquence de coupure comprise entre 100 kHz et 1MHz ($<F_e/2$). Compte tenu de la fréquence de résonance à 2.7 kHz, le module de $H(f)$ est très faible à 100 kHz ($<10^{-3}$) et on peut faire l'approximation qu'il est quasiment nul, du coup on peut faire l'économie du filtre. Par ailleurs, on verra par la suite que le bruit de quantification empêche d'obtenir $H(f)$ pour des fréquences supérieures à environ 20 kHz.

Le nombre de points d'acquisition est de 10000 (profondeur mémoire de l'oscilloscope utilisé pour l'acquisition). Pour utiliser un algorithme de FFT, on utilise la technique de

remplissage en complétant la longueur de l'enregistrement par 6384 zéros, en effet $(10000 + 6384) = 16384 = 2^{14}$.

La fenêtre utilisée est une fenêtre rectangulaire, il s'ensuit que $Z(n) = X_1(n)$, le tracé des $Z(n)$ est donné à la Fig. 5. Les points calculés sont représentés par des croix, et la courbe théorique de $H(f)$ est donnée en trait continu. On vérifie que l'écart en fréquence entre deux points de calcul est égal à : $F_e / N = 2 \cdot 10^6 / 2^{14} = 122$ Hz. On vérifie également que les $Z(n)$ sont bien symétriques par rapport à $F_e/2 = 1$ MHz (attention l'échelle des fréquences est logarithmique).

D'après la théorie, on devrait obtenir un ensemble de composantes $Z(n)$ identiques à celles de la Fig. 6.

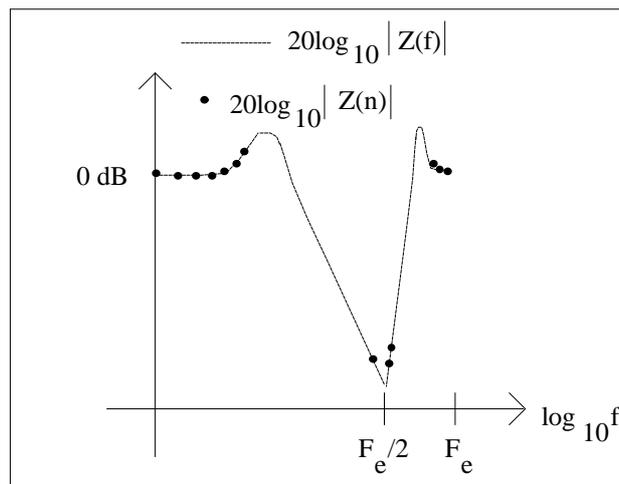


Fig. 6 Tracé théorique des composantes $Z(n)$ en l'absence de bruit de quantification

Sur la Fig. 5, on constate qu'au-delà de 20 kHz environ, les composantes $Z(n)$ calculées s'écartent des valeurs théoriques attendues. On observe un plateau de bruit situé grosso modo à -40 dB. Quelles sont les sources de bruit possibles ? on distingue : *i*) le bruit physique dû au fait que les composants électroniques sont à une certaine température (voir cours sur le bruit), *ii*) le bruit de quantification et *iii*) le bruit de calcul dû aux troncatures, ce dernier provient du fait que le calculateur ne travaille pas avec un nombre infini de bits. Dans le cas présent, c'est le bruit de quantification le plus important, il est directement lié au processus de conversion analogique-numérique. En effet, à chaque instant kT_e un échantillon est codé sur M bits ($M = 8$ dans le cas de l'oscilloscope utilisé), pour effectuer le calcul des $Z(n)$ il faut donc convertir le code de 8 bits en une valeur numérique. Le code nous renseigne uniquement sur la plage dans laquelle tombe l'échantillon $x(kT_e)$ mais pas sur sa valeur exacte, arbitrairement on attribue le milieu de la plage, il s'ensuit un bruit de quantification égal à la différence entre la vraie valeur de l'échantillon $x(kT_e) = z(kT_e)$ et la valeur restituée notée ici $[x(kT_e) + r(kT_e)]$. La Fig. 7 montre comment le bruit de quantification $r(kT_e)$ est introduit dans le traitement du signal. Les composantes $G(n)$ de la transformée de Fourier s'écrivent alors :

$$G(n) = \sum_{k=0}^{k=N-1} [x(k) + r(k)] e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{k=0}^{k=N-1} x(k) e^{-j2\pi nk/N} + \sum_{k=0}^{k=N-1} r(k) e^{-j2\pi nk/N}$$

$$= X_1(f) \Big|_{f=nF_e/N} + \text{bruit} \quad (5)$$

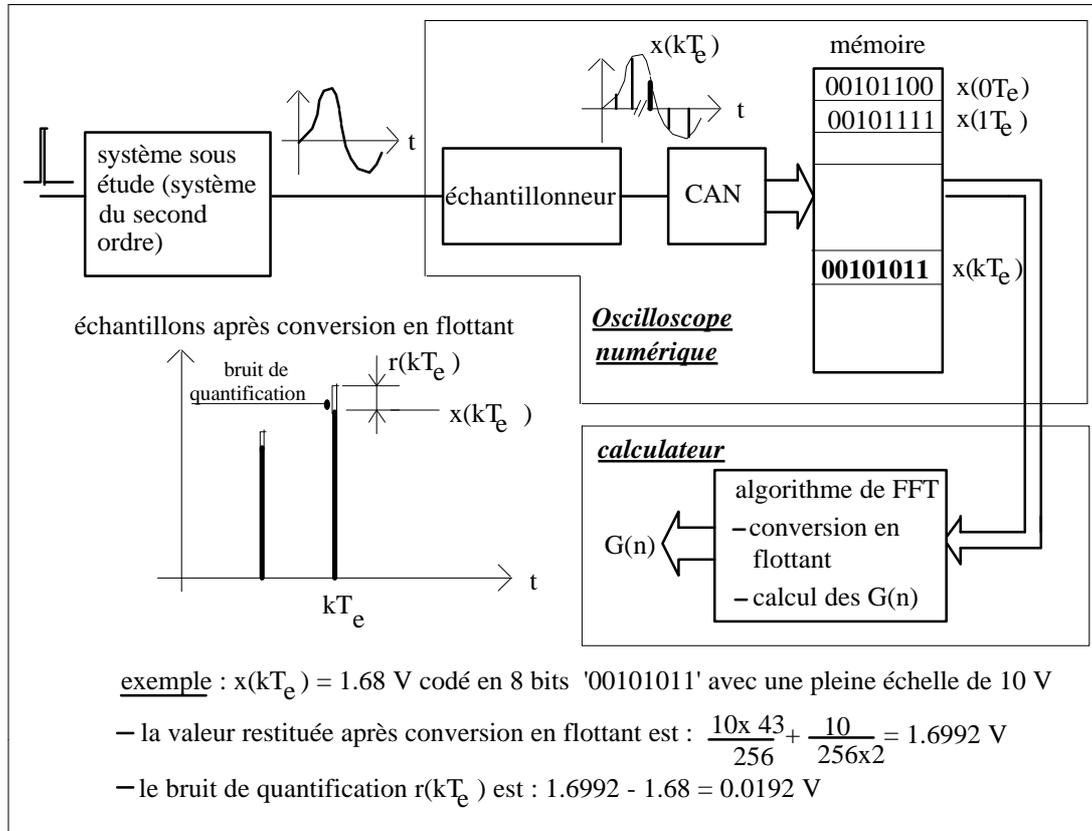


Fig. 7 Comment est introduit le bruit de quantification

Le bruit de quantification $r(kT_e)$ varie d'un échantillon à l'autre, il s'agit d'une suite de valeurs aléatoires comprises entre 0 et $1/2$ quantum au maximum. La transformée de Fourier du bruit donne à peu près un niveau constant à -40 dB sur la Fig. 5, ce qui veut dire que les valeurs $r(kT_e)$ sont très peu corrélées (\rightarrow bruit blanc; la transformée de Fourier d'un bruit blanc est une constante autrement dit toutes les composantes de fréquence sont présentes avec une égale amplitude). Un rapide calcul fait à partir de la relation $\frac{S}{B} = 6M + 10 \log_{10} \left(\frac{V_e^2}{V_{\max}^2} \right)$ donne un rapport Signal/Bruit de 48 dB ($M = 8$), en supposant que le signal V_e (sortie du système sous étude) est uniformément réparti entre 0 V et la pleine échelle. D'après la Fig. 5, on obtient au maximum un rapport S/B de $\approx 49 \text{ dB}$ en prenant le maximum à 2.7 kHz (9 dB) et le plateau de bruit à -40 dB ($9 \text{ dB} - [-40 \text{ dB}] = 49 \text{ dB}$).

Remarque: Si la largeur de l'impulsion θ est trop grande, les composantes $G(n)$ diffèrent alors, même pour les basses fréquences, des valeurs de $H(f)$ calculées pour $f = nF_e/N$. En effet, dans ce cas le signal en sortie du système est différent de la réponse impulsionnelle $h(t)$ bien que son allure n'en soit pas très différente comme le montre la Fig. 8 où $\theta = 200 \mu\text{s}$. Comme précédemment, les échantillons $x(nT_e)$ de la Fig. 8 sont reliés entre eux par des segments de droite afin d'en faciliter la lecture. La transformée de Fourier numérique $X_1(f)=Z(f)$ des échantillons $x(kT_e)$ est, aux basses fréquences ($f < F_e/2$), égale au produit

$E(f)H(f)$ où $E(f)$ est la transformée de Fourier de l'impulsion appliquée à l'entrée du système. La transformée de Fourier $E(f)$ présente des zéros aux valeurs multiples de $1/\theta$, c'est à dire pour 5, 10, 15 kHz, etc Les composantes $G(n)$ de la transformée de Fourier (\neq des $Z(n)$ à cause du bruit de quantification) sont données à la Fig. 9. On observe les lobes significatifs dus à $E(f)$. Les composantes $G(n)$ sont calculées pour des multiples de F_e/N , avec $F_e = 2\text{MHz}$ et $N = 16384$. On remarque que 5, 10, 15 kHz ne sont pas des multiples de $F_e/N = 122.07\text{ Hz}$. Par exemple, le point calculé le plus proche de 5 kHz se situe à 5004.8 Hz ($41 \times 2 \cdot 10^6 / 2^{14}$), c'est la raison pour laquelle les composantes $G(n)$ ne présentent pas de zéro ($-\infty$ en dB).

β) cas où $H(f)$ est obtenu à partir de la réponse indicielle

On se propose maintenant d'obtenir $H(f)$ à partir de la réponse à un échelon de tension. Dans ce cas $H(f)$ est théoriquement obtenu en calculant la dérivée de la réponse indicielle, on rappelle que la transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction est égale à la transformée

$$\text{de la fonction multipliée par } j\omega; \quad TF\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = j\omega TF(f(t)).$$

Le système étudié est le même que précédemment, les échantillons $x(nT_e)$ de la réponse indicielle sont représentés sur la Fig. 10 (ici encore les points sont reliés entre eux par des segments de droite afin d'en faciliter la lecture).

Comme précédemment, les échantillons utilisés pour le calcul de la transformée de Fourier sont entachés du bruit de quantification, les composantes $G(n)$ de la transformée de Fourier sont calculées de la manière suivante.

$$\begin{aligned} G(n) &= \sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{(x(k) + r(k)) - (x(k-1) + r(k-1))}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} \\ G(n) &= \sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{x(k) - x(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} + \sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} \\ &= X_1(f) \Big|_{f=nF_e/N} + \text{bruit} \end{aligned} \quad (6)$$

Le module de $\sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N}$ varie comme $2\pi n F_e / N$ (voir démonstration ci-dessous). Il s'ensuit que les composantes de bruit sont d'autant plus grandes que la fréquence est grande. Quand $X_1(f=nF_e/N)$ devient très faible, un tracé de $20\log_{10}|G(n)|$ en fonction de $\log_{10}f$ doit faire apparaître une pente de 20dB/décade si le bruit est blanc.



démonstration :

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} = \frac{1}{T_e} \left[\sum_{k=1}^{k=N-1} r(k) e^{-j2pkn/N} - \sum_{k=1}^{k=N-1} r(k-1) e^{-j2pkn/N} \right]$$

effectuons le changement de variable $(k-1) = u$ dans la deuxième somme, il vient :

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} = \frac{1}{T_e} \left[\sum_{k=1}^{k=N-1} r(k) e^{-j2pkn/N} - e^{-j2pn/N} \sum_{u=0}^{u=N-2} r(u) e^{-j2pku/N} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} \approx \frac{(1 - e^{-j2pn/N})}{T_e} \left[\sum_{k=1}^{k=N-1} r(k) e^{-j2pkn/N} \right]$$

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} \approx 2je^{-jpn/N} \frac{\sin(pn/N)}{T_e} \left[\sum_{k=1}^{k=N-1} r(k) e^{-j2pkn/N} \right]$$

$$\left| \sum_{k=1}^{k=N-1} \left[\frac{r(k) - r(k-1)}{T_e} \right] e^{-j2pkn/N} \right| \approx \frac{2pnF_e}{N} \left[\sum_{k=1}^{k=N-1} r(k) e^{-j2pkn/N} \right] \quad \text{si } n < N$$

Le facteur $2pnF_e/N$ est bien équivalent à la pulsation ω_p puisque les points de calcul sont des multiples de F_e/N . On vérifie que le bruit augmente linéairement avec la fréquence.

Les composantes $G(n)$ calculées sont représentées à la Fig. 11, comme précédemment l'écart en fréquence entre deux points de calcul est égal à 122 Hz (2 MHz/16384). On observe, au-delà d'une vingtaine de kHz, une remontée de bruit proportionnelle à la fréquence, on peut vérifier que la pente est voisine de 20 dB/décade.

remarque : Si on conserve la même sensibilité verticale sur l'oscilloscope et que l'on divise l'amplitude de l'échelon à l'entrée du système par quatre par exemple (voir Fig. 12 et 10), on observe sur la Fig. 13 un niveau de bruit plus élevé pour les composantes $G(n)$. Ceci montre bien que le bruit observé est dû au bruit de quantification. En effet, diviser par quatre l'amplitude du signal revient à convertir le signal non plus sur 8 bits mais sur 6 bits, on peut donc s'attendre à une remontée de bruit de 12 dB d'après la relation $\frac{S}{B} = 6M + 10 \log_{10} \left(\frac{V_e^2}{V_{\max}^2} \right)$, c'est ce qui est vérifié expérimentalement sur la Fig. 13.

2ème cas : les échantillons $x(k)$ ne sont pas nuls pour $(N-1) < k < 0$, dans ce cas $Z(f) \neq X_1(f)$ et les $Z(n)$ sont différents des $X_1(f)$ calculés pour $f = nF_e/N$.

Prenons pour exemple, le cas d'une cosinusoïde échantillonnée où les $x(k) = A \cos(\omega_0 k T_e)$ ne sont pas nuls pour $(N-1) < k < 0$. La transformée de Fourier discrète est calculée à partir de N échantillons $z(n)$ seulement. Ceux-ci sont obtenus en multipliant les $x(k)$ par les échantillons $y(k)$ d'une fenêtre de pondération avec $y(k) = 0$ pour $(N-1) < k < 0$.

D'un point de vue mathématique, on a $z(n) = x(n)y(n)$ d'où $Z(f) = X(f) \otimes Y(f)$ où le symbole \otimes désigne le produit de convolution. Dans l'intervalle $[0, F_e/2]$, la transformée de Fourier numérique de $X(f)$ est une raie d'amplitude $A/2$ située à f_0 comme le montre la Fig. 14-

a. La transformée de Fourier numérique de $Y(f)$ est constituée d'un **lobe principal** et de **lobes secondaires** comme le montre la Fig. 14-b. Le produit de convolution $X(f) \otimes Y(f)$ revient à "accrocher" le motif de $Y(f)$ autour de la fréquence f_0 comme le montre la Fig. 14-c. Les composantes $Z(n)$ calculées sont des multiples de F_e/N où N est le nombre de points d'acquisition. Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire ($y(k) = y_R(k) = 1$ pour $0 \leq k \leq (N-1)$), les zéros de $Y(f) = Y_R(f)$ sont des multiples de F_e/N . Il s'ensuit que si f_0 est également un multiple de F_e/N ($f_0 = KF_e/N$ par exemple avec K un entier) alors toutes les composantes $Z(n)$ sont nulles sauf $Z(n=K)$ comme le montre la Fig. 14-c- α . Par contre si f_0 n'est pas un multiple de F_e/N alors toutes les composantes $Z(n)$ sont différentes de zéro, c'est le cas de la Fig. 14-c- β .

NB : On peut remarquer que si f_0 est un multiple de F_e/N , alors la durée de l'enregistrement $NT_e = N/F_e$ est un multiple de la période $T_0 = 1/f_0$, autrement dit l'enregistrement contient un nombre entier de périodes T_0 :

$$f_0 = KF_e/N \rightarrow N/F_e = K/f_0 \rightarrow NT_e = KT_0$$

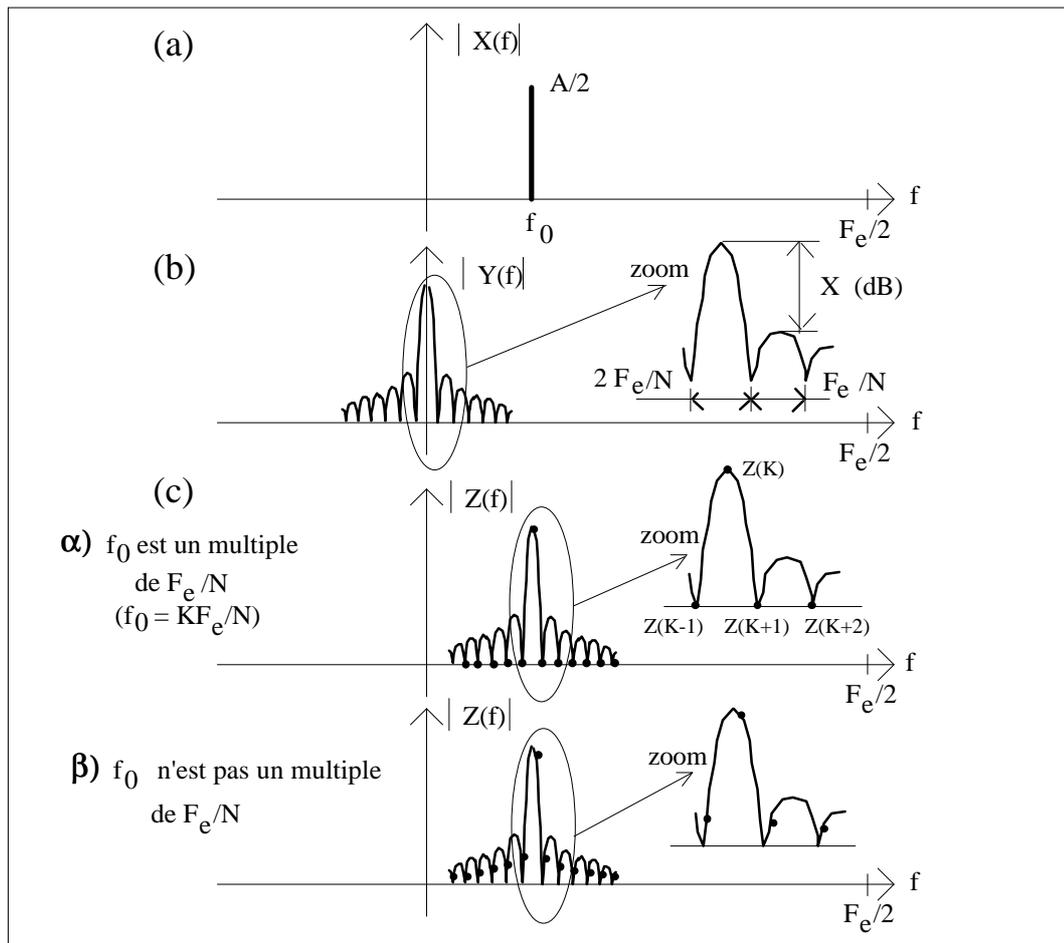


Fig. 14 Transformées de Fourier numériques $X(f)$ du signal cosinusoidal de fréquence f_0 , $Y(f)$ de la fenêtre et $Z(f)$ du résultat de la convolution. Les cas α) et β) correspondent respectivement au cas où f_0 est un multiple de F_e/N et au cas où f_0 n'est pas un multiple de F_e/N .

Les Fig. 15, 16, 17 et 18 montrent les résultats expérimentaux obtenus à partir d'un générateur et d'un oscilloscope numérique muni de la fonction FFT (oscilloscope Yokogawa).

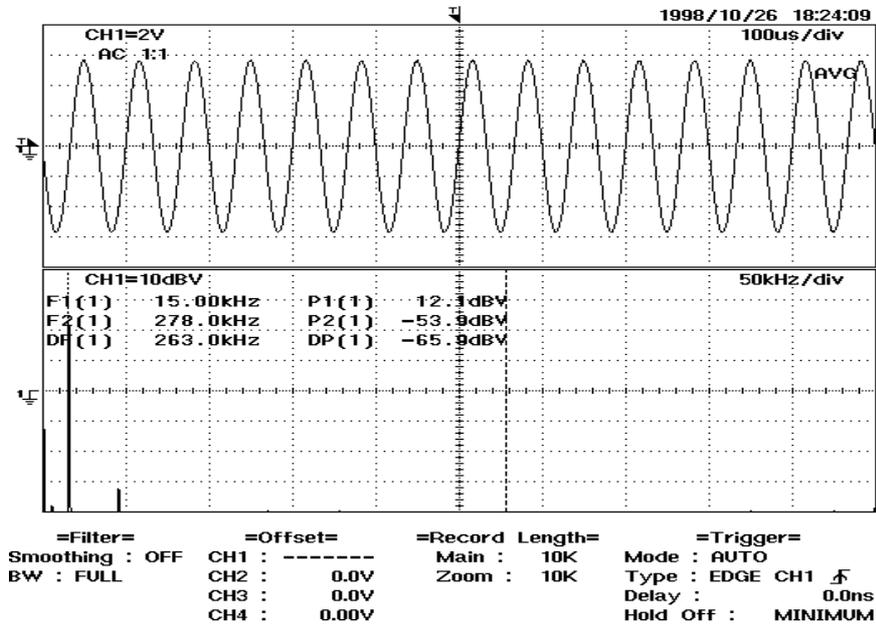


Fig. 15 Cas où la durée d'enregistrement est un multiple de la période du signal ($f_0 = 15$ kHz)

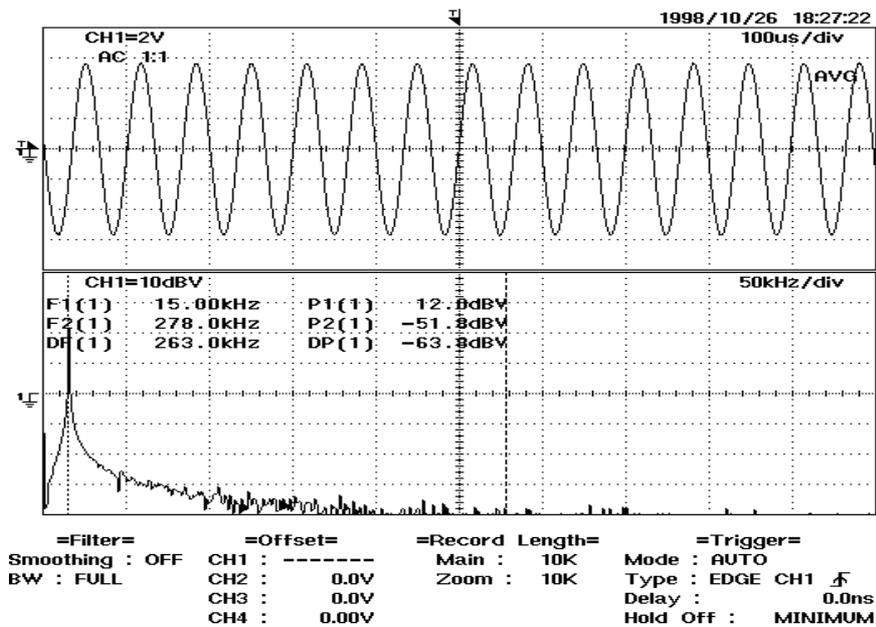


Fig. 16 Cas où la durée d'enregistrement n'est pas un multiple de la période du signal ($f_0 = 15.07$ kHz)

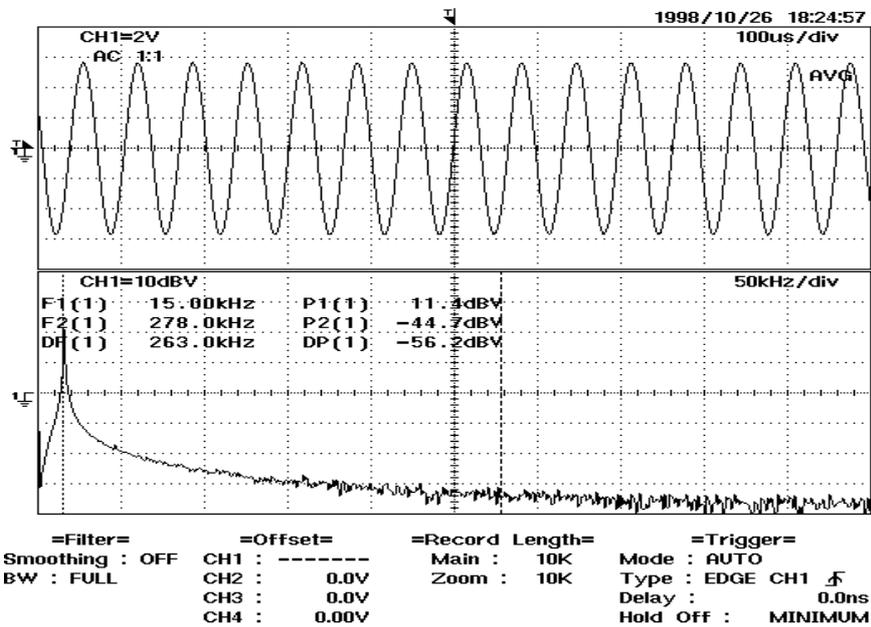


Fig. 17 Cas où la durée d'enregistrement n'est pas un multiple de la période du signal ($f_0 = 15.2$ kHz)

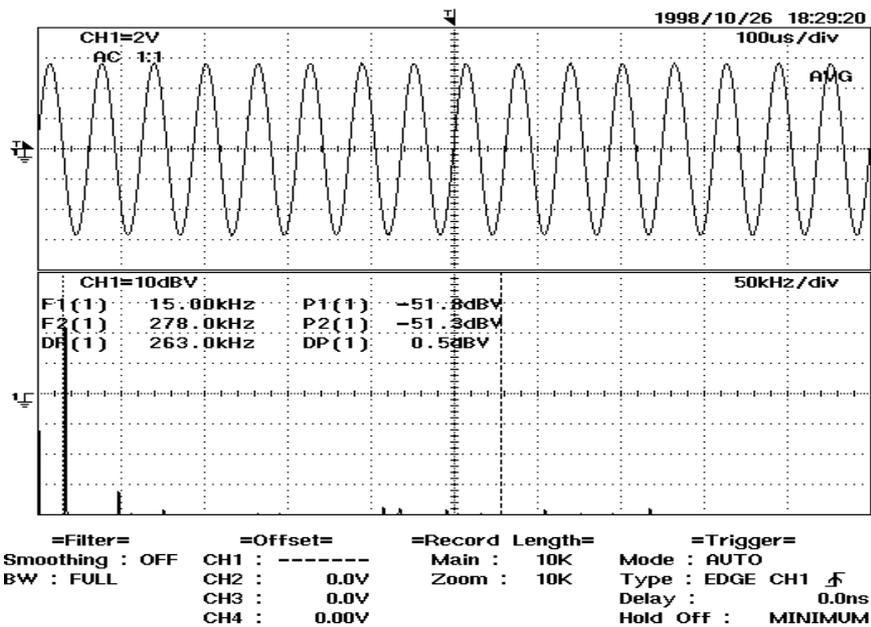


Fig. 18 Cas où la durée d'enregistrement est un multiple de la période du signal ($f_0 = 16$ kHz)

II-1- les fenêtres d'analyse

Les fenêtres d'analyse ou de pondération jouent un rôle très important dans l'analyse de Fourier. Une fenêtre est caractérisée par :

- la largeur de son lobe principal, elle fixe la **résolution** de l'analyse, c'est à dire l'aptitude à pouvoir séparer deux fréquences proches l'une de l'autre.
- les amplitudes des lobes secondaires, ils fixent la **dynamique** de l'analyse, c'est à dire l'aptitude à mesurer les amplitudes très différentes de deux composantes de fréquence relativement éloignées l'une de l'autre

Pour un nombre d'échantillons N fixé la fenêtre rectangulaire est celle qui donne la meilleure résolution; la largeur du lobe principal est égale à $2F_e/N$. La fenêtre rectangulaire ne permet pas par contre d'obtenir une bonne dynamique car les lobes secondaires décroissent très lentement. En général on caractérise une fenêtre par l'atténuation X (en dB) du premier lobe secondaire (voir Fig. 14-b). Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire, X est égal à 13 dB; cette valeur est indépendante du nombre de points N. Pour obtenir une meilleure dynamique, on construit d'autres fenêtres, la Fig. 18 en montre quelques unes ; Triangulaire, Hanning, Hamming, Blackman La fenêtre de Hanning, Hamming et Blackman sont des fenêtres dites trigonométriques, à titre d'exemple les échantillons $y_H(k)$ de la fenêtre de Hanning s'écrivent :

$$y_H(k) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \right] \text{ pour } 0 \leq k \leq (N-1). \text{ On peut remarquer que toutes ces fenêtres}$$

ont un lobe principal plus large que $2F_e/N$, ($4F_e/N$ pour Hanning, Hamming et $8F_e/N$ pour Blackman) donc une résolution moins bonne que la fenêtre rectangulaire. Elles ont par contre des lobes secondaires plus faibles que ceux de la fenêtre rectangulaire, elles offrent donc une meilleure dynamique. On peut se poser la question : pourquoi ces différentes fenêtres ? le choix d'une fenêtre se fait en fonction de l'écart en fréquence entre les deux composantes de fréquence dont on veut mesurer les amplitudes. Prenons le cas par exemple des fenêtres de Hanning et Hamming, si les deux fréquences à distinguer sont relativement proches l'une de l'autre, une fenêtre de Hamming s'impose car le premier lobe secondaire, ainsi que les suivants, sont à environ - 45 dB du lobe principal, par contre si l'écart entre les deux fréquences est grand une fenêtre de Hanning est mieux appropriée car l'atténuation des lobes décroît quand la fréquence augmente et elle peut être inférieure à -45 dB.

Les Fig. 19 à 24 illustrent un problème de **résolution**, en effet il s'agit de séparer deux fréquences très proches l'une de l'autre, $\Delta F = 1.95$ Hz. Les amplitudes des deux composantes sont identiques. La Fig. 19 montre les échantillons $x(k) = z(k)$ après passage au travers d'une fenêtre rectangulaire. La Fig. 20 montre les échantillons $z(k)$ après passage au travers d'une fenêtre de Hanning. Les Fig. 21 et 22 montrent les composantes $Z(n)$ de la FFT obtenues avec la fenêtre rectangulaire. Sur la Fig. 22, qui est un "zoom" de la Fig. 21, on observe bien les deux composantes car on vérifie la relation $\Delta F > 2F_e/N$, ($F_e = 1$ kHz et $N = 1024$). Sur les Fig. 23 et 24, on a tracé les composantes $Z(n)$ de la FFT dans le cas d'une fenêtre de Hanning, cette fois il est impossible de séparer les deux composantes de fréquence car $\Delta F < 4F_e/N$.

Les Fig. 25 à 27 illustrent un problème de **dynamique**, cette fois il s'agit de faire apparaître les deux composantes d'un signal constitué de deux fréquences relativement éloignées l'une de l'autre; $\Delta F = 29.78$ Hz. Le rapport des amplitudes des deux composantes est de 5×10^5 . La Fig. 25 montre les échantillons $x(k) = z(k)$ après passage au travers d'une fenêtre rectangulaire. La Fig. 26 montre les échantillons $z(k)$ après passage au travers d'une fenêtre de Hanning. Sur la Fig. 26, on vérifie bien la forme cosinusoidale de la fenêtre de Hanning. Les composantes $Z(n)$ de la FFT, après passage des échantillons au travers de la fenêtre

rectangulaire, sont tracées sur la Fig. 27; les deux composantes de fréquence ne sont pas clairement observées. L'utilisation d'une fenêtre de Hanning permet quant à elle une bonne observation des deux composantes comme le montre la Fig. 28.

Les courbes des Fig. 19 à 28 ont été obtenues à l'aide du logiciel *Matlab*.