

**Dept GEII IUT Bordeaux I**

**APPLICATION des SERIES de FOURIER :**  
**ANALYSEUR de SPECTRE ANALOGIQUE**

**(Vol. 1)**

**G. Couturier**

Tel : 05 56 84 57 58

email : [couturier@elec.iuta.u-bordeaux.fr](mailto:couturier@elec.iuta.u-bordeaux.fr)

## Sommaire

### I- Série de Fourier

I- 1- Généralités sur les séries de Fourier

I- 2- Aspect physique de la série de Fourier

I- 3- Développement en termes complexes des séries de Fourier

I- 4- Exemple

I- 5- Analyse spectrale

I- 6- Valeur efficace et taux de distorsion ; égalité de Bessel Parseval

### II- Transformée de Fourier

II-1- Ecriture complexe de la transformée de Fourier

II- 2- Transformée de Fourier de la dérivée d'un signal

II- 3- Quelques exemples

## Application des séries de Fourier: analyseur de spectre analogique

Bien que la notion de transformée de Fourier soit plus générale que celle de série de Fourier nous commencerons par introduire cet outil car il est d'un abord plus simple et plus compréhensible.

(Fourier Joseph : mathématicien Français 1768-1830, il introduisit la transformée de Fourier pour résoudre certains problèmes de propagation de la chaleur).

### I- Série de Fourier

#### I-1- Généralités sur les séries de Fourier

Les séries de Fourier permettent donc de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel, on utilise principalement les séries de Fourier dans le cas des signaux périodiques, cependant il est inexact de dire que les séries de Fourier ne peuvent être utilisées qu'en présence de signaux périodiques, voir ci-dessous.

On ne s'étendra pas ici sur les conditions d'existence des séries de Fourier, on rappellera simplement que la fonction doit obéir aux conditions de Dirichlet, c'est à dire être à variations bornées.

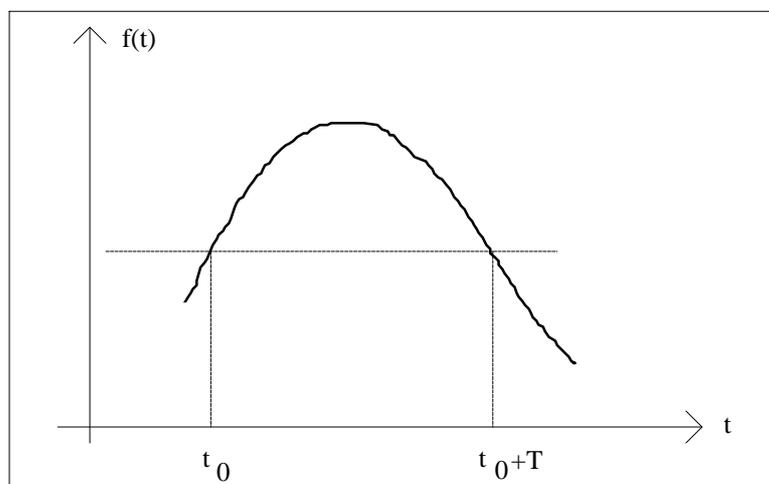
*Une fonction  $f(x)$  définie sur un intervalle  $[a,b]$  est dite à variations bornées si q.q.s. le partage de  $[a,b]$  par  $x_0=a < x_1 < x_2 \dots < x_n < \dots = b$ , la somme :*

$$\sum_n |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

*est bornée par un nombre  $M$  indépendant du partage.*

En électronique tous les signaux sont à variations bornées. On pourra vérifier qu'un signal carré est bien à variation bornée.

Soit donc un intervalle de temps  $[t_0, t_0+T]$  sur lequel une fonction  $f(t)$  satisfait les conditions de Dirichlet, voir Fig.1. Décomposer  $f(t)$  en série de Fourier, c'est projeter  $f(t)$  sur un ensemble de fonctions de base constituées des fonctions  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ , avec  $n$  entier et  $\omega=2\pi/T$ .



**Fig.1** Fonction  $f(t)$  satisfaisant les conditions de Dirichlet sur l'intervalle  $(t_0, t_0+T]$

Cette opération est à rapprocher de celle qui consiste à décomposer un vecteur  $\vec{V}$  dans un espace à deux dimensions suivant deux vecteurs de base  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . Pour effectuer une telle opération il faut que  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  constituent une base orthonormée, c'est à dire que :

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ et } \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \quad (1)$$

Si les trois produits scalaires ci-dessus sont vérifiés, alors on peut écrire  $\vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j}$  avec :

$$a = \vec{V} \cdot \vec{i} \text{ et } b = \vec{V} \cdot \vec{j} \quad (2)$$

les coefficients  $a$  et  $b$  mesurent respectivement les projections du vecteur  $\vec{V}$  sur les vecteurs de base  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .

Dans le cas d'une décomposition en série de Fourier, les relations d'orthogonalité, analogues aux relations (1) précédentes, s'écrivent :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \cos(m\omega t) dt &= 0 \text{ q.q.s. } n \text{ et } m \left( \equiv \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \right) \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt &= 0 \quad \text{si } n \neq m \left( \equiv \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \right) \\ &= T/2 \quad \text{si } n = m \left( \equiv \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \right) \\ \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt &= 0 \quad \text{si } n \neq m \left( \equiv \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \right) \\ &= T/2 \quad \text{si } n = m \left( \equiv \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \right) \end{aligned} \quad (3)$$

**NB** : le calcul de ces intégrales ne présentent pas de difficulté, il suffit de transformer les produits en sommes en utilisant les relations trigonométriques classiques.

Par analogie avec l'écriture  $\vec{V} = a \vec{i} + b \vec{j}$ , la décomposition de  $f(t)$  suivant les fonctions de base  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$  s'écrit :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\omega t) + a_n \sin(n\omega t)] \quad (4)$$

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  représentent les projections de  $f(t)$  sur les fonctions de base  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ . Ces fonctions sont à valeur moyenne nulle sur l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ , il s'ensuit que le coefficient  $b_0$  mesure la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ .

Les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  s'obtiennent donc en projetant respectivement  $f(t)$  sur les fonctions  $\sin(n\omega t)$  et  $\cos(n\omega t)$  :

$$\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} \left( b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k \cos(k\omega t) + a_k \sin(k\omega t)) \right) \cos(n\omega t) dt$$

$$= \frac{T}{2} b_n$$

d'où :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (5)$$

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

Dans l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ , la série de Fourier calculée précédemment représente bien la fonction  $f(t)$ , cependant deux questions demeurent :

1- si  $f(t)$  présente une discontinuité en  $x_0 \in [t_0, t_0+T]$  par exemple, que vaut la série de Fourier en  $x_0$ , les fonctions  $\cos(\cdot)$  et  $\sin(\cdot)$  sont des fonctions continues.

2 - les fonctions  $\sin(n\omega t)$  et  $\cos(n\omega t)$  sont définies q.q.s. la valeur de la variable  $t$ , alors que vaut la série de Fourier pour  $t$  hors de l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$  ?

\* En un point de discontinuité  $x_0$ , la valeur de la série de Fourier est égale à :

$$\frac{f(x_0 + \varepsilon) + f(x_0 - \varepsilon)}{2} \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (6)$$

c'est le Lemme de Jordan.

\* La série de Fourier donnée par (4) peut bien entendu être évaluée pour  $t$  quelconque à l'extérieur de l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ . Compte tenu du caractère périodique des fonctions  $\sin(n\omega t)$  et  $\cos(n\omega t)$ , la série de Fourier est donc une fonction périodique de période  $T$ . En conclusion, la série de Fourier représente correctement  $f(t)$  dans l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ , en dehors de cet intervalle, la série de Fourier reproduit à gauche et à droite de l'intervalle la fonction  $f(t)$  définie entre  $t_0$  et  $t_0+T$ .

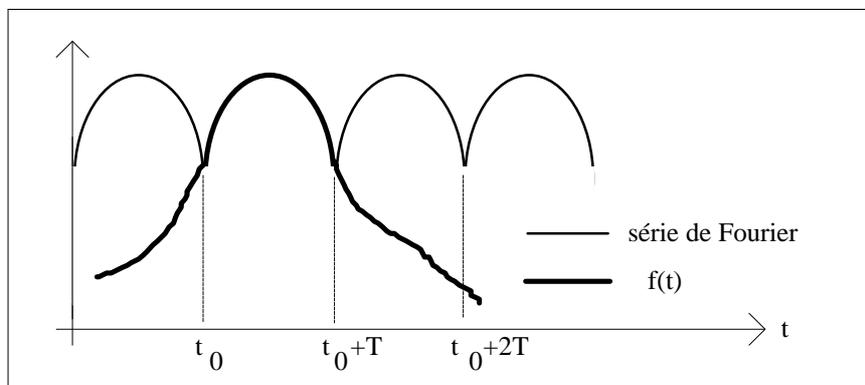


Fig. 2 La série de Fourier calculée sur l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$  est périodique, de période  $T$

Remarque 1 : On montre (sans démonstration dans ce cours) que si on tronque la série de Fourier ( $\sum_{n=1}^{\infty} \rightarrow \sum_{n=1}^M$ ), la série de Fourier tronquée et évaluée avec les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ , donnés par les relations (5), reste la meilleure représentation, autrement dit il n'existe pas de nouveaux coefficients  $a'_n$  et  $b'_n$  améliorant la représentation. Bien entendu, si le nombre  $M$  devient de plus en plus petit la série de Fourier s'éloigne de plus en plus de la fonction de départ comme le montre la Fig. 3.

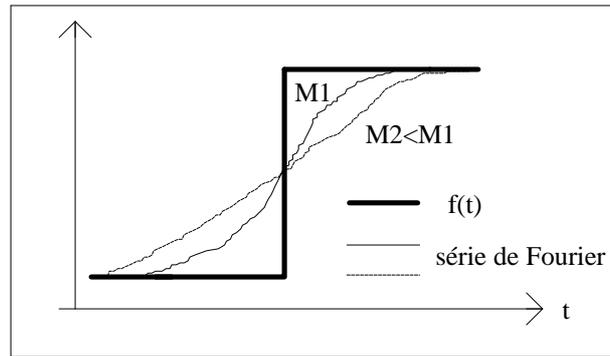


Fig. 3 Effet de la troncature d'une série de Fourier

D'après ce qui précède, si la fonction  $f(t)$  est une fonction périodique, de période  $T$ , la série de Fourier est identique à la fonction  $f(t)$  q.q.s. la valeur de la variable  $t$ , excepté aux instants de discontinuité. C'est la raison pour laquelle, on dit que l'utilisation des séries de Fourier est réservée aux fonctions périodiques. Nous avons cependant vu qu'il était possible d'obtenir une série de Fourier identique à  $f(t)$  non périodique sur un intervalle de temps limité, hors de cet intervalle la série de Fourier est différente de la fonction.

Remarque 2 : Le calcul des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  se simplifie dans certains cas :

a)  $f(t)$  est une fonction paire : tous les coefficients  $a_n$  sont nuls, la fonction paire la plus élémentaire étant  $\cos(\omega t)$ .

b)  $f(t)$  est une fonction impaire : tous les coefficients  $b_n$  sont nuls, la fonction paire la plus élémentaire étant  $\sin(\omega t)$ .

### I-2- Aspect physique de la série de Fourier

L'écriture des séries de Fourier sous la forme suivante :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\omega t) + a_n \sin(n\omega t)] \quad (7)$$

présente en fait peu d'intérêt physique, en effet si la fonction  $f(t)$  subit une simple translation suivant l'axe des temps alors les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  sont modifiés. En effet, si la fonction  $f(t)$  est translatée de  $\tau$ , alors la série de Fourier s'écrit :

$$f(t - \tau) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n \cos(n\omega(t - \tau)) + a_n \sin(n\omega(t - \tau))] \quad (8)$$

$$f(t - \tau) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [b'_n \cos(n\omega t) + a'_n \sin(n\omega t)]$$

$$\text{avec} \quad \begin{aligned} b'_n &= b_n \cos(n\omega\tau) - a_n \sin(n\omega\tau) \\ a'_n &= a_n \cos(n\omega\tau) - b_n \sin(n\omega\tau) \end{aligned} \quad (9)$$

On constate donc que les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ne sont pas des invariants temporels.

Prenons le cas trivial où  $f(t)=\cos(\omega t)$ , alors  $b_1=1$ ,  $b_n=0$  pour  $n>1$  et  $a_n=0$  q.q.s.  $n$ , par contre pour  $f(t)=\sin(\omega t)$  alors  $a_1=1$ ,  $a_n=0$  pour  $n>1$  et  $b_n=0$  q.q.s.  $n$ . D'un point de vue mathématique ces deux fonctions sont effectivement différentes, mais d'un point de vue physique les deux signaux sont équivalents. L'origine des temps est seulement nécessaire pour attribuer un nom à une fonction. Il est clair que, autant pour un oscilloscope que pour un analyseur de spectre, les fonctions  $\cos(\omega t)$  et  $\sin(\omega t)$  sont équivalentes, elles contiennent la même puissance, seul le terme de phase change.

En conséquence, on cherche donc une nouvelle écriture des séries de Fourier dans laquelle la puissance est conservée après une translation suivant l'axe des temps.

Cette nouvelle écriture s'obtient en posant :

$$tg(j_n) = a_n/b_n \quad \text{et} \quad s_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \quad (10)$$

En introduisant  $tg(\varphi_n)$  et  $s_n$  dans l'expression (7), on obtient l'écriture suivante :

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n) \quad (11)$$

ou encore  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$  avec  $b_0 = s_0 \cos(\varphi_0)$ , en général on pose arbitrairement :

$$\cos(j_0) = 1/\sqrt{2}.$$

Sous cette forme, les coefficients  $s_n$  et  $\varphi_n$  sont respectivement l'amplitude et la phase de la composante de pulsation  $n\omega$ .

Si  $f(t)$  subit une translation de la quantité  $\tau$ , les coefficients  $s_n$  sont inchangés alors que les coefficients  $\varphi_n$  sont modifiés. En effet, si  $f(t)$  est translaté de  $\tau$ , alors la série de Fourier s'écrit :

$$f(t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega(t - \tau) - \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - j_n) \quad \text{avec} \quad j'_n = \varphi_n + n\omega\tau \quad (12)$$

Si on traite de nouveau l'exemple précédent avec  $f(t)=\cos(\omega t)$  ou  $\sin(\omega t)$ , on obtient cette fois ci  $s_1=1$  pour les deux fonctions,  $\varphi_1=0$  pour la fonction  $\cos(\omega t)$  et  $\varphi_1=\pi/2$  pour  $\sin(\omega t)$ .

### I-3- Développement en termes complexes des séries de Fourier

En introduisant la notation complexe de  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ , il est possible d'obtenir une écriture complexe de la série de Fourier. Par ailleurs, l'écriture complexe est une bonne introduction à l'intégrale de Fourier que nous étudierons en suivant.

Introduisons donc l'écriture complexe de  $\cos(n\omega t)$  et  $\sin(n\omega t)$ , il vient :

$$\cos(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega t) = \frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j} \quad (13)$$

L'expression (4) de la série de Fourier prend alors la forme suivante :

$$f(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow \infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (14)$$

Les coefficients complexes  $c_n$  sont reliés aux coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ainsi qu'aux coefficients  $s_n$  et  $\phi_n$  par les relations suivantes :

$$c_n = \frac{b_n - ja_n}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{b_n + ja_n}{2}$$

$$c_n = \frac{s_n}{2} e^{-j\phi_n} \quad (15)$$

Dans les deux formes précédentes (4) et (11), chaque composante de fréquence était représentée par deux coefficients ; un d'amplitude et un de phase dans l'écriture (11) par exemple. L'écriture complexe ne fait apparaître qu'un seul coefficient  $c_n$  qui comprend bien entendu un module et une phase. On remarque que les parties réelle et imaginaire des  $c_n$  sont respectivement paire et impaire en  $\omega$ , ceci vient du fait que les fonctions  $\cos()$  et  $\sin()$  sont des fonctions paire et impaire.

$$\text{partie réelle des } c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\text{partie imaginaire des } c_n = -\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (16)$$

I- 4- : Exemple :

Soit le signal périodique  $f(t)$  constitué de pulse de largeur  $2\alpha$  et de période  $T$ :

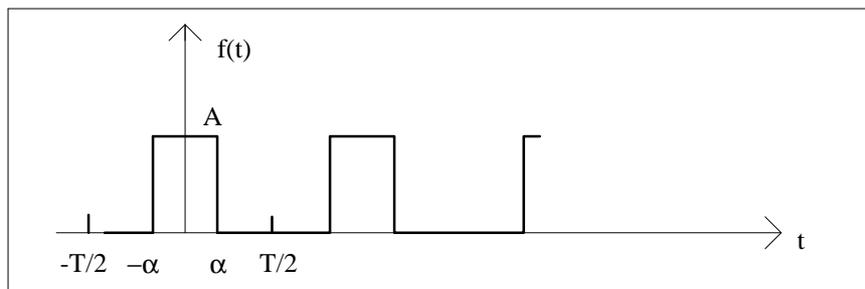


Fig. 4 Exemple de signal à décomposer en série de Fourier

Ce signal joue un rôle particulier dans la théorie de l'échantillonnage que nous aborderons en suivant, en effet échantillonner un signal revient à le multiplier par la fonction  $f(t)$ .

La fonction  $f(t)$  est paire, en conséquence tous les coefficients  $a_n$  sont nuls, les coefficients  $b_n$  sont donnés par :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-a}^a A \cos(n\omega t) dt = \frac{4Aa}{T} \frac{\sin(2pna/T)}{2pna/T} \quad (17)$$

La série de Fourier de  $f(t)$  s'écrit donc :

$$f(t) = \frac{2Aa}{T} + \frac{4Aa}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2pna/T)}{2pna/T} \cos(n\omega t) \quad (18)$$

Les coefficients  $s_n$  et  $\varphi_n$  s'écrivent :

$$s_n = \left| \frac{4Aa}{T} \frac{\sin(2pna/T)}{2pna/T} \right| \text{ avec } \mathbf{j}_n = 0 \text{ si } \frac{\sin(2pna/T)}{(2pna/T)} > 0 \text{ et } \mathbf{j}_n = \mathbf{p} \text{ si } \frac{\sin(2pna/T)}{(2pna/T)} < 0 \quad (19)$$

Les coefficients  $c_n$  s'écrivent :

$$c_n = \frac{2Aa}{T} \frac{\sin(2pna/T)}{2pna/T} \quad (20)$$

### I- 5- Analyse spectrale

Faire une analyse spectrale, c'est chercher les valeurs des coefficients  $s_n$ , à cet effet on dispose d'analyseurs de spectres dont le synoptique est donné à la Fig. 5.

Il s'agit d'appareils purement analogiques nécessitant la présence d'un signal périodique à l'entrée. Nous verrons, après avoir introduit la transformée de Fourier discrète, qu'il est possible de réaliser une analyse spectrale par un calcul numérique.

Les analyseurs de spectres utilisent le principe de "l'hétérodynage", également mis en œuvre dans les récepteurs radio. Une analyse spectrale consiste à déplacer un filtre de bande passante étroite devant le signal à analyser, cependant compte tenu de la difficulté de réaliser un filtre passe-bande étroit de fréquence centrale ajustable, on contourne le problème par utilisation de "l'hétérodynage". Dans cette technique, le filtre passe-bande a une fréquence centrale fixe  $F_0$  et on s'arrange pour modifier le signal par modulation afin d'amener successivement les différentes composantes de fréquence à la fréquence  $F_0$ , à cet effet on utilise un multiplieur comme le montre la Fig. 5. En sortie d'un multiplieur on trouve la somme et la différence des fréquences appliquées aux deux entrées, ceci résulte de la relation trigonométrique :  $\cos(a)\cos(b) = (1/2)[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ .

Le VCO (Voltage Controlled Oscillator) délivre une tension sinusoïdale dont la fréquence dépend linéairement de la tension de commande  $u$  délivrée par un générateur de rampes.

Pour faire comprendre le fonctionnement de l'ensemble plaçons nous dans le cas simple où le signal d'entrée  $e(t)$  est une sinusoïde de fréquence 1MHz, supposons par ailleurs que  $F_0 = 100$  MHz.

En l'absence de signal  $e(t)$ , on obtiendra en sortie du détecteur de crête une tension différente de zéro pour une tension  $u = 0$ , supposons par ailleurs que pour  $u=0$  le faisceau d'électron se trouve au centre de l'écran. Quand le signal  $e(t)$  est appliqué à l'entrée, trois pics sont observés sur l'écran :

- 1) le pic de gauche est obtenu pour une tension  $u = -u_1$  telle que la fréquence  $F_1$  du VCO vérifie la relation :  $F_1 + 1\text{MHz} = 100\text{ MHz}$ , soit  $F_1 = 99\text{ MHz}$
- 2) le pic du centre est obtenu pour une tension  $u = 0$ , et la fréquence du VCO est égale à  $100\text{ MHz}$
- 3) le pic de droite est obtenu pour une tension  $u = u_1$  telle que la fréquence  $F_2$  du VCO vérifie la relation :  $F_2 - 1\text{MHz} = 100\text{MHz}$ , soit  $F_2 = 101\text{MHz}$

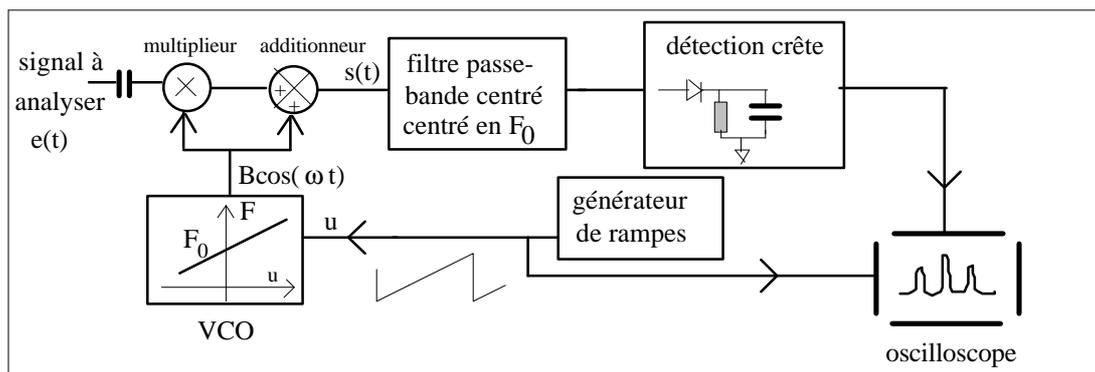


Fig. 5 Synoptique d'un analyseur de spectre hétérodyne

Si le signal d'entrée  $e(t)$  est un signal périodique non sinusoïdal, il est décomposable en série de Fourier, il comprend donc plusieurs raies et le raisonnement fait précédemment est à refaire pour toutes les composantes de fréquence. Prenons par exemple un signal dont le fondamental est à  $1\text{ MHz}$ , les harmoniques sont à  $2\text{MHz}$ ,  $3\text{MHz}$ , etc ..., .

Le fondamental à  $1\text{MHz}$  est observé comme précédemment pour  $u = -u_1$  et  $u = u_1$ , c'est à dire pour des fréquences du VCO de  $99\text{ MHz}$  et  $101\text{ MHz}$  respectivement.

L'harmonique à  $2\text{ MHz}$  est observé pour  $u = -u_2$  et  $u = u_2$ , c'est à dire pour des fréquences du VCO de  $98\text{ MHz}$  et  $102\text{ MHz}$ .

L'harmonique à  $3\text{ MHz}$  est observé pour  $u = -u_3$  et  $u = u_3$ , c'est à dire pour des fréquences du VCO de  $97\text{ MHz}$  et  $103\text{ MHz}$ .

etc ...,

On obtient sur l'écran de l'oscilloscope un graphe similaire à celui de la Fig. 6, il suffit alors de modifier l'axe des abscisses pour que la fréquence  $0\text{ Hz}$  soit au centre de l'écran, on obtient ainsi le spectre du signal  $e(t)$ .

On remarque que l'analyseur de spectre de la Fig. 5 ne permet pas d'observer la composante continue du signal. La place de la composante continue est prise par la raie de référence à  $100\text{ MHz}$ .

Les analyseurs de spectres analogiques sont employés essentiellement dans le domaine des hautes fréquences (q.q. kHz à q.q. GHz), aux plus basses fréquences l'analyse spectrale est faite à l'aide d'une carte d'acquisition et d'un logiciel de calcul de FFT (Fast Fourier Transform), voir la suite du cours.

*remarque* : l'analyse spectrale ne donne accès qu'aux modules des différentes composantes de fréquence. On ne peut donc pas reconstruire le signal dans le domaine temporel à partir du seul spectre car il manque les relations de phase entre les différentes composantes de fréquence.

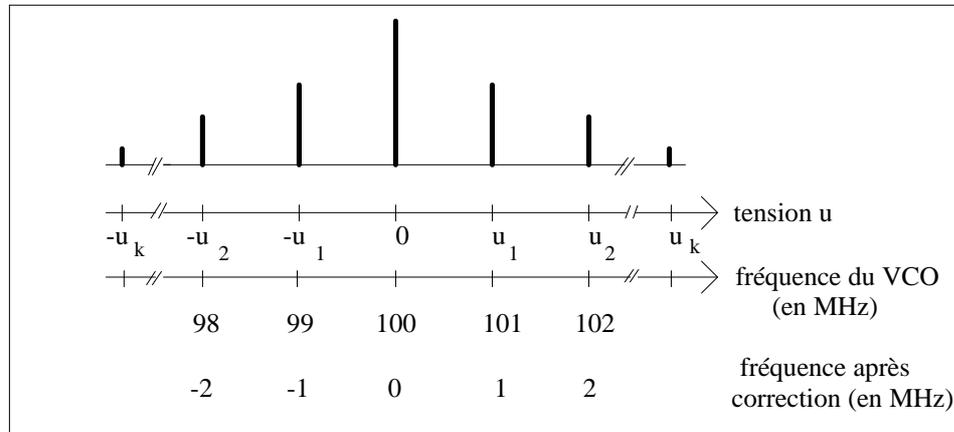


Fig. 6 Spectre observé "en théorie" sur l'écran de l'oscilloscope

#### Les principaux réglages d'un analyseur de spectre :

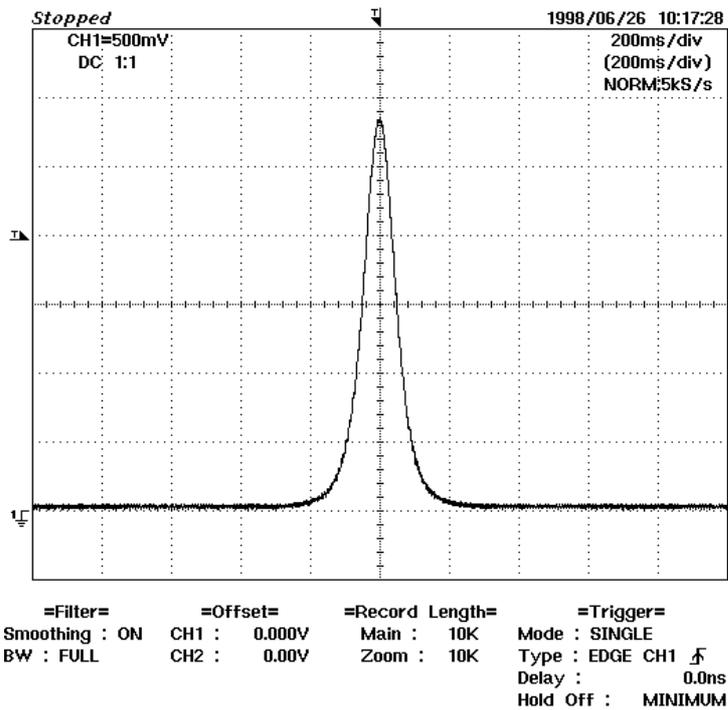
- résolution (RBW : Resolution BandWidth), en pratique, on n'observe pas des raies fines comme le montre la Fig. 6, mais des pics plus ou moins larges suivant la bande passante du filtre passe-bande situé en sortie du modulateur. La bande passante du filtre fixe la résolution de l'appareil, c'est à dire l'aptitude à séparer deux fréquences proches. La forme des pics traduit la réponse en fréquence du filtre passe bande.

Les analyseurs de spectre disposent d'un balayage en fréquence automatique qui ajuste la vitesse de balayage en fonction de la résolution et de la gamme de fréquence analysée; pour une gamme de fréquence donnée, la vitesse de balayage est d'autant plus lente que la résolution est grande (RBW faible). En mode manuel, il y a risque de déformer les pics si la vitesse de balayage est trop grande. En effet, la forme du pic reproduit la courbe de réponse en fréquence du filtre passe bande si la vitesse de balayage est suffisamment faible pour permettre au filtre d'atteindre son régime de fonctionnement stationnaire. Les deux pics de la Fig. 7 illustrent les deux conditions de fonctionnement; automatique et manuelle avec pour ce dernier mode un temps de balayage trop faible qui conduit à une déformation du pic.

- Fréquence centrale : si elle est égale à 0 Hz, on obtient un graphe symétrique sur l'écran de l'oscilloscope, voir la Fig. 8-a. La fréquence centrale est reliée à l'ordonnée à l'origine de la caractéristique fréquence-tension du VCO. Si on modifie l'ordonnée à l'origine, le graphe se déplace soit vers la droite, soit vers la gauche comme le montre la Fig. 8-b. On peut ainsi amener une raie quelconque au centre de l'écran.

- plage de fréquence analysée (frequency span) : la plage de fréquence analysée est liée à la pente de la caractéristique fréquence-tension du VCO. Si on diminue la pente, la gamme de fréquence analysée est plus faible et on peut ainsi faire un zoom autour de la composante de fréquence située au centre de l'écran comme le montre la Fig.8-c.

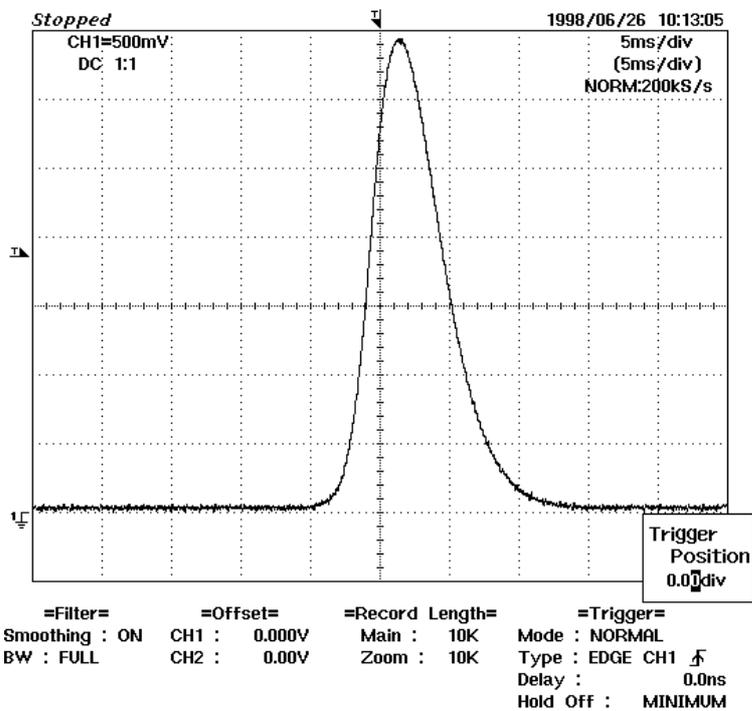
a) mode automatique : bonnes conditions d'observation :



Fréquence centrale: 50 kHz  
 Temps de balayage: 6s  
 Filtre de résolution: 100 Hz  
 Filtre vidéo: 1000Hz

**NB:** le pic est bien positionné à 50 kHz et sa largeur à mi-hauteur ( $\approx 300$ Hz) est égale à celle du filtre de résolution (300 Hz).

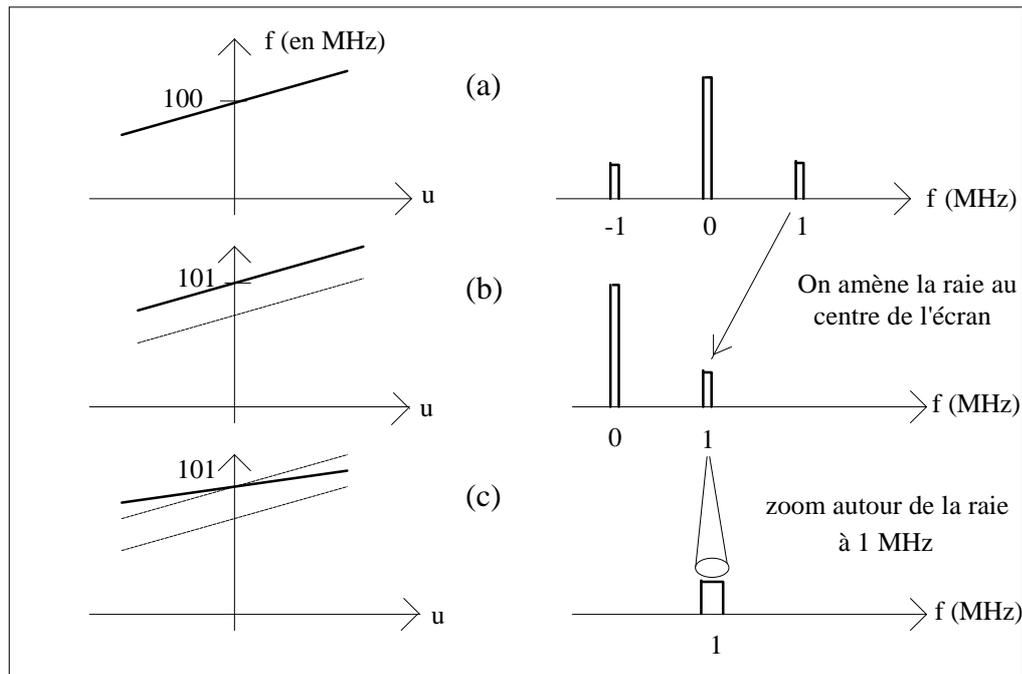
β) mode manuel : mauvaises conditions d'observation



Fréquence centrale: 50 kHz  
 Temps de balayage: 50 ms  
 Filtre résolution: 300 Hz  
 Filtre vidéo: 1000Hz

**NB:** le pic est déplacé vers les hautes fréquences et sa largeur à mi-hauteur (environ 1.2 kHz) est supérieure à la largeur (300 Hz) du filtre de résolution.

Fig. 7 : Influence de la vitesse de balayage sur la forme d'un pic signal test: signal sinusoïdal de fréquence 50 kHz



**Fig. 8** Relations entre les caractéristiques fréquence-tension du VCO et les graphes observés; la modification de l'ordonnée à l'origine permet de déplacer les fréquences (a et b), la modification de la pente permet d'ajuster la gamme de fréquence analysée (c).

#### I-6- Valeur efficace et taux de distorsion : égalité de Bessel Parseval

Dans de nombreuses situations (domaine HiFi, instrumentation, ...), on cherche à fabriquer des amplificateurs linéaires, c'est à dire des systèmes tels que si le signal d'entrée se met sous la forme  $V_e = A \cos(\omega t)$ , le signal de sortie prenne la forme  $V_s = K A \cos(\omega t)$ , où  $K$  est le gain de l'amplificateur. La linéarité conditionne la qualité de reproduction du signal.

Si l'amplificateur est non linéaire, la fonction de transfert ne s'écrit plus  $V_s = K V_e$ , mais par exemple  $V_s = K V_e + K_1 V_e^2 + K_2 V_e^3 + \text{etc.}$ , il s'ensuit que si le signal  $V_e$  est de la forme  $A \cos(\omega t)$ , le signal de sortie comportera non seulement la pulsation fondamentale  $\omega$ , mais également des harmoniques, c'est à dire les pulsations  $2\omega, 3\omega, \text{etc.}$  Le signal de sortie n'est donc plus cosinusoidal, il reste cependant périodique et admet donc une décomposition en série

de Fourier de la forme :  $V_s = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - \phi_n)$ .

Pour quantifier la quantité d'harmoniques présents dans le signal, on introduit une grandeur appelée taux de distorsion  $D$ , sa définition est la suivante :

$$D = \frac{\text{valeur efficace des harmoniques}}{\text{valeur efficace du fondamental}} \quad (21)$$

On rappelle que la valeur efficace d'un signal périodique  $f(t)$  de période  $T$  s'écrit :

$$\text{val. eff.} = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)^2 dt \right]^{1/2} \quad (22)$$

le carré de la valeur efficace porte le nom de valeur quadratique.

Déterminons donc la valeur efficace du signal  $V_s(t)$ , elle se met sous la forme :

$$val. \text{ eff. } [V_s(t)] = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cos(n\omega t - j_n) \right)^2 dt \right]^{1/2} \quad (23)$$

Compte tenu des relations d'orthogonalité (3), l'expression (23) se ramène à :

$$val. \text{ eff. } [V_s(t)] = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left( \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 \cos^2(n\omega t - j_n) \right) dt \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(n\omega t - j_n) dt \right]^{1/2}$$

La valeur efficace d'un signal peut donc s'exprimer soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel ; c'est l'égalité de Bessel Parseval.

$$val. \text{ eff. } [V_s(t)] = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [V_s^2(t)] dt \right]^{1/2} = \left[ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2} \quad (24)$$

domaine temporel                      domaine fréquentiel

Il s'ensuit que le taux de distorsion D, prend la forme suivante :

$$D = \frac{\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}}{\left[ \frac{1}{2} s_1^2 \right]^{1/2}} = \frac{\left[ \sum_{n=2}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}}{s_1}$$

(25)

Le schéma synoptique d'un distorsiomètre est présenté ci-dessous :

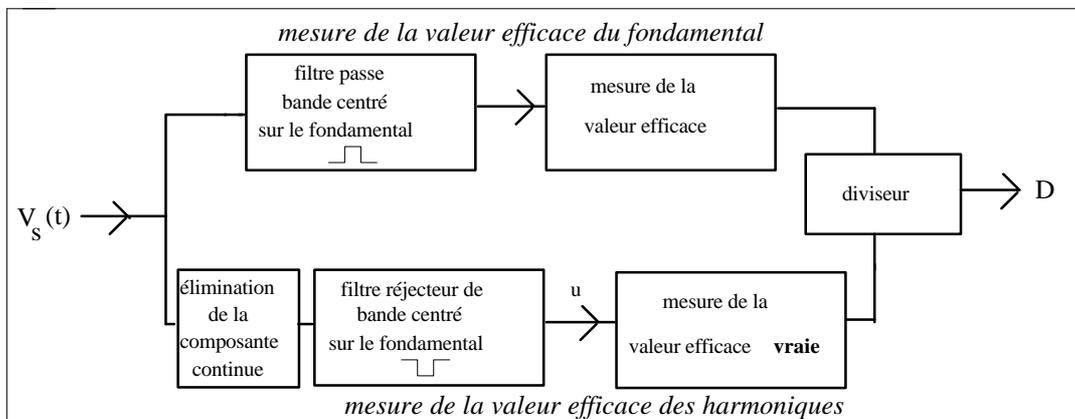


Fig. 9 Schéma synoptique d'un distorsiomètre

La mesure de la valeur efficace des harmoniques nécessite un voltmètre à valeur efficace vraie, c'est à dire un appareil qui effectue l'opération suivante :

$$val. \text{ eff } [u] = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u^2 dt \right]^{1/2} \quad (26)$$

avec u le signal en sortie du filtre réjecteur. Les voltmètres classiques ne mesurent pas en général la valeur efficace vraie, la valeur efficace est déduite de la valeur crête et un facteur correctif est appliqué (Val. eff. =  $V_{\text{crête}} / \sqrt{2}$  ), ceci n'est valable bien entendu que pour les signaux de type sinus. Le synoptique d'un appareil réalisant une mesure de valeur efficace vraie est donné à la Fig. 10 ci-dessous :

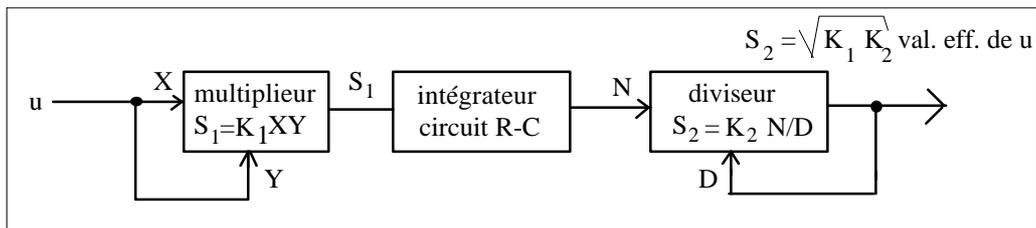


Fig. 10 Synoptique d'un dispositif de mesure de la valeur efficace vraie

En pratique, on mesure le plus souvent un taux de distorsion approché défini par :

$$D = \frac{\text{valeur efficace des harmoniques}}{\text{valeur efficace du signal}} = \frac{\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}}{\left[ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}} = \frac{\left[ \sum_{n=2}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}}{\left[ \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 \right]^{1/2}} \quad (27)$$

Dans le cas des signaux présentant un faible taux de distorsion, les expressions (25) et (27) sont pratiquement équivalentes, en effet les valeurs efficaces du signal et du fondamental sont très peu différentes. La mesure approchée de D permet de faire l'économie du filtre passe-bande accordé sur le fondamental (voir Fig. 9).

## II- Transformée de Fourier

Pour introduire la transformée de Fourier, reprenons le cas de la fonction f(t) de la Fig. 1 et cherchons un développement lorsque la durée T tend vers l'infini. Au chapitre I, nous avons vu que la série de Fourier de la fonction f(t), définie sur l'intervalle  $[t_0, t_0+T]$ , était constituée d'un ensemble infini de raies espacées les unes des autres de la quantité  $\omega = 2\pi/T$ . Intuitivement, si T tend vers l'infini, alors l'écart entre chaque raie tend vers zéro ; le spectre de raies devient alors un spectre continu. C'est ce que nous allons montrer ci-dessous.

### II-1- Écriture complexe de la transformée de Fourier

Pour obtenir l'écriture de la transformée de Fourier en termes complexes, on fait tendre T vers l'infini dans la relation (14). On rappelle que :

$$f(t) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow \infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\Omega t} dt \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{2p}{T}$$

Par rapport à la relation (14), on a juste changé de notation,  $\omega$  a été transformé en  $\Omega$ , ceci ne modifie absolument rien au résultat, on comprendra le pourquoi de cette nouvelle notation par la suite.

Posons par ailleurs,  $n\Omega = \omega$  et  $\Delta\omega = \Omega$ ,  $\Delta\omega$  représente l'incrément de pulsation, c'est à dire l'écart entre deux pulsations ( $\Delta\omega = (n+1)\Omega - n\Omega$ ), avec cette notation  $f(t)$  s'écrit :

$$f(t) = \sum_{w=-\infty, \dots, -\Omega, 0, \Omega, \dots, \infty} \left[ \frac{\Delta w}{2p} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jw t} dt \right] e^{jw t} \quad (28)$$

Quand  $T \rightarrow \infty$ , la somme  $\sum_{w \rightarrow -\infty}^{w \rightarrow \infty} (\dots) \frac{\Delta w}{2p} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\dots) df$  et  $f(t)$  prend la forme suivante :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt \right) e^{jw t} df = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{jw t} df \quad (29)$$

avec  $F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jw t} dt$  : la transformée de Fourier de  $f(t)$ . On écrit également :  $F(f) = \text{TF}[f(t)]$ . La fonction  $f(t)$  est appelée transformée de Fourier inverse de  $F(f)$ , on note  $f(t) = \text{TF}^{-1}[F(f)]$ .

La transformée de Fourier est donc une fonction complexe de la fréquence, elle comprend une partie réelle et une partie imaginaire, qui s'écrivent respectivement :

$$\text{Partie réelle} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$\text{Partie imaginaire} = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (30)$$

La partie réelle est donc une fonction paire de la fréquence ( $\cos(n\omega t)$  ; fct paire en  $\omega$ ), alors que la partie imaginaire est une fonction impaire de la fréquence ( $\sin(n\omega t)$  ; fct impaire en  $\omega$ ).

Il existe une relation entre l'énergie exprimée dans le domaine temporel et fréquentiel ; c'est l'égalité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) F^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 df \quad (31)$$

Cette égalité est analogue à celle de Bessel-Parseval pour les séries Fourier, elle exprime la conservation de l'énergie.

## II-2- Transformée de Fourier de la dérivée d'un signal

Cette propriété nous sera utile dans la suite du cours. Soit donc un signal  $f(t)$  de transformée de Fourier  $F(f)$ , on se propose de calculer la transformée de Fourier de  $df(t)/dt$ . Par définition de la transformée de Fourier, on obtient :

$$T.F. \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} d(f(t)) = [f(t)e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d(e^{-j\omega t})$$

$= j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  si  $f(t) \rightarrow 0$  pour  $t \rightarrow \pm\infty$ , ce qui est toujours le cas pour les signaux physiques d'énergie finie.

d'où le résultat important :  $T.F. \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = j\omega T.F. [f(t)]$

(32)

### II-3- Quelques exemples

Nous traitons successivement les cas d'une impulsion de durée limitée et de la fonction impulsion de Dirac.

#### Exemple n°1

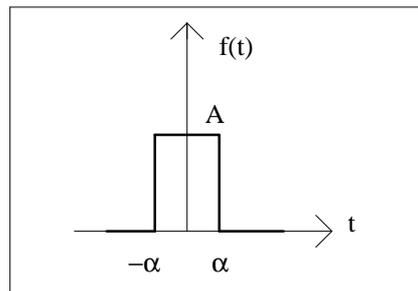


Fig. 11 Transformée de Fourier d'une impulsion

La transformée de Fourier se ramène ici au calcul de l'intégrale suivante :

$$F(f) = \int_{-\alpha}^{\alpha} A e^{-j\omega t} dt = 2A\alpha \frac{\sin(\omega\alpha)}{\omega\alpha} \quad (33)$$

Le premier zéro de  $F(f)$  est situé à la fréquence  $f=1/2\alpha$ . En conclusion, le spectre d'une impulsion s'étend d'autant plus dans le domaine des fréquences que sa durée est faible, voir la Fig. 12.

#### Exemple n°2

C'est le cas de la fonction impulsion de Dirac, c'est à dire le cas où  $\alpha \rightarrow 0$  et  $2A\alpha=1$ . On obtient alors :

$$TF[\delta(t)] = 1 \quad (34)$$

Ce résultat est fondamental en traitement du signal, il montre qu'une impulsion de Dirac comprend toutes les fréquences avec une égale amplitude. En conséquence connaître la réponse d'un système à une excitation de Dirac, c'est connaître la réponse du système à toutes les excitations.

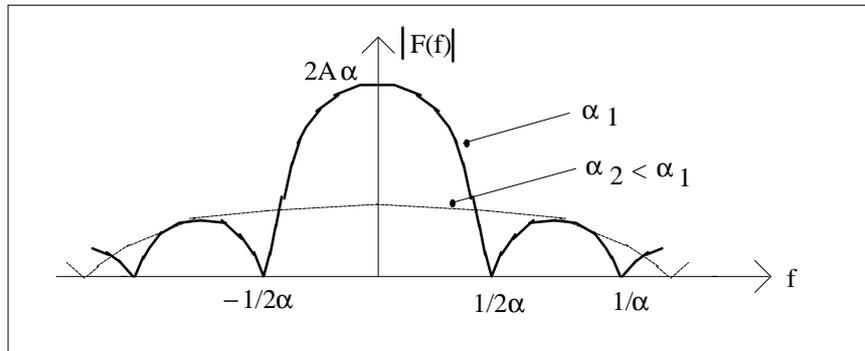


Fig. 12 Module de la transformée de Fourier d'une impulsion