# Seconde partie :

# LES FONCTIONS DE L'ELECTRONIQUE

# LE FILTRAGE HARMONIQUE

## L'OUTIL THEORIQUE

### LINEARITE FONCTION DE TRANSFERT

Un système est qualifié de linéaire s'il obéît au principe de superposition c'est à dire que si $y_i$ est la réponse du système à un signal d'entrée $x_i$ ,
la réponse à une excitation $\sum_i a_i x_i$ est $\sum_i a_i y_i$

Si le système est stationnaire c'est à dire que son comportement n'évolue pas au cours du temps , les signaux d'entrée et sortie sont alors solutions d'une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_m \frac{d^m}{dt^m} s(t) + ....... + a_0 s(t) = b_k \frac{d^k}{dt^k} e(t) + ....... + b_0 e(t)$$

On écrit symboliquement : s(t) = A e(t) ou A est l'opérateur linéaire .

Il est facile de montrer que $e(t)=e^{\alpha t}$ est une fonction propre de cet opérateur en effet à $e(t)= e^{\alpha t}$ correspond un signal de sortie s(t) = H. e(t) ou H est une constante indépendante du temps :

$$H(\alpha) = \frac{b_k \alpha^k + ..... + b_0}{a_m \alpha^m + .... + a_0}$$

On appelle degré du système le plus grand des deux entiers m et k .

### Formule fondamentale des systèmes linéaires .

Tout signal fonction du temps peut être exprimé en fonction de sa transformée de Fourier E(j2πf) :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(j2\pi f) e^{j2\pi ft} df$$

Considérons une composante élémentaire de cette transformation

$$E(j2\pi f) e^{j2\pi ft}$$

C'est une fonction propre de A avec $\alpha$ = J2πf
Il lui correspond donc un signal de sortie :

$$H(j2\pi f) \cdot E(j2\pi f) e^{j2\pi f}$$

Une intégrale n'est pas autre chose qu'une sommation d'un nombre infini de termes , en vertu du théorème de superposition le signal de sortie est la même combinaison linéaire des réponses à chaque terme soit :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(j2\pi f) \cdot E(j2\pi f) e^{j2\pi f}$$

Expression qui montre que la transformée de Fourier du signal de sortie est :

$$\boxed{S(j2\pi f) = H(j2\pi f) \cdot E(j2\pi f)}$$

C'est la formule fondamentale des systèmes linéaires, H(j2πf) est la **Fonction de transfert** du système.

En utilisant le théorème du produit de convolution on en déduit :

$$s(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\cdot e(t-u)du=h(t)\otimes e(t)$$

ou h(t) est la transformée de Fourier de H , c'est la réponse impulsionnelle du système , sa réponse à une 'impulsion de Dirac ' et $\otimes$ le **produit de convolution**.

Sous certaines conditions peu restrictives on sait qu'un signal fonction du temps peut s'exprimer à partir de sa transformée de Laplace S(p) :

$$e(t)=\int_{a-j\infty}^{a+j\infty}E(p)e^{pt}dp$$

Avec $E(p)=\int_{0}^{\infty}e(t)e^{-pt}dt$

Le même raisonnement que plus haut conduit à l'expression en p de la formule précédente :
Si e(t) à pour transformée de Laplace E(p)
S(t) S(p)
Alors S(p)=H(p).E(p)

Et $H(p)=\dfrac{b_k p^k+........+b_0}{a_m p^m+......+a_0}$

Quotient de deux polynômes en p .
Les racines du polynôme numérateur sont les **Zéros** de la fonction de transfert
Les racines du polynôme dénominateur sont les **pôles** de la fonction de transfert.

## Stabilité

Il est toujours possible de développer H(p) en une somme de fractions simples dont le dénominateur ne contient qu'un pôle réel ou deux pôles complexes conjugués.

$$H(p)=\alpha_{k-m}p^{k-m}+.....+\alpha_0+\sum_i\frac{R_i}{p-p_i}+\sum_j\frac{A_jp+B_j}{p^2+\alpha_jp+\omega_j^2}$$

Le second terme regroupe les pôles imaginaires conjugués. Les racines du dénominateur sont :

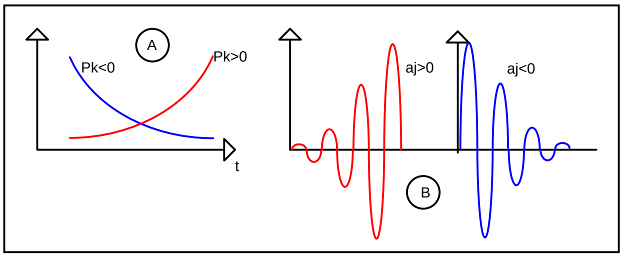
$$\alpha_j\pm j\beta_j$$

Introduisons à l'entrée une impulsion brève et intense, modélisée par une impulsion de Dirac δ(t).La transformée de Laplace de cette impulsion est Δ(p)=1 La réponse du système est alors la transformée de H lui même.

Les premiers termes ne peuvent pas exister car la transformée de $p^k$ est la dérivée k ieme de δ qui n'a aucun sens physique. D'ou première conclusion:

**Pour un système réel le degré du numérateur de sa fonction de transfert est inférieur ou au plus égal à celui de son dénominateur.**

**D°(N(p)) ≤D°(D(p))**




Les termes de la première sommation donnent :

$\sum_i R_i e^{p_it}$ Figure ci contre A

Ceux de la seconde :

$$\sum_j e^{\alpha_jt}\left(A_j\cos(\beta_jt)+\frac{B_j-A_j}{\beta_j}\sin(\beta_jt)\right)$$

Figure ci contre B

Ces signaux ne tendent vers zéro pour t⇒∝ , ce qui est la caractéristique d'un système stable; que si $p_i$ et $\alpha_j$ sont négatifs . D'ou la règle:

**Un système linéaire n'est stable que s'il ne possède pas de pôles à partie réelle positive.**

Un polynôme dont les racines n'ont pas de partie réelle positive est appelé **polynôme de Hurtwitz** Pour reconnaître un polynôme de Hurtwitz il n'est pas nécessaire de calculer les racines , il existe des critères , par exemple le critère de Routh qui permettent de conclure. Nous retiendrons seulement une condition nécessaire **: Un polynôme de Hurtwitz n'a pas de coefficients négatifs**.

**Note:** *Les conditions de stabilité sont simples lorsque la fonction de transfert est une expression en p , d'ou l'intérêt de la notation opérationnelle ( de Laplace ) qui sera utilisée le plus souvent dans la suite.*

## Condition de non distorsion .Causalité

Un signal n'est pas déformé par la traversée d'un système s'il est seulement amplifié et/ou retardé. A un signal d'entrée e(t) il doit correspondre un signal $s(t)=Ae(t-t_0)$ Amplification de l'amplitude par A , retard $t_0$.

En vertu du théorème du retard à $s(t)=Ae(t-t_0)$ correspond par transformation de Fourier :

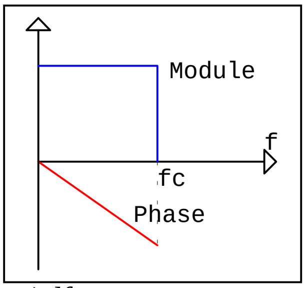
$$S(j2\pi f)=A\ E(j2\pi f).\exp(-j2\pi ft_0)$$

Relation qui montre qu'un système ne distordant pas doit avoir pour fonction de transfert :

$$A\ \exp(-j2\pi ft_0)$$

Fonction de transfert dont le module est **indépendant de la fréquence** et **la phase** $2\pi ft_0$ **proportionnelle à la fréquence**.

Un tel filtre n'est bien sûr pas réalisable mais si le signal d'entrée n'a pas de composantes spectrales au delà d'une fréquence de coupure fc , il suffit que la condition soit satisfaite pour f < fc. Considérons donc le passe bas idéal défini par :



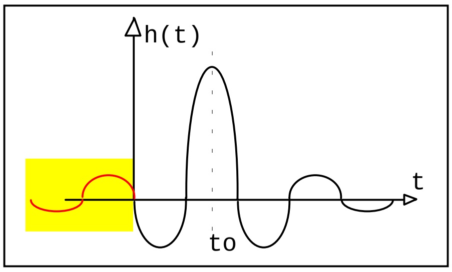

$$H(j2\pi f)=A\ \exp(-j2\pi ft_0)\text{pour } |f|<fc$$

Et $H(j2\pi f)=0$ pour $|f|>fc$

Pour étudier le comportement d'un tel filtre idéal, calculons sa réponse à une impulsion, c'est la transformée de Fourier de sa fonction de transfert , soit :

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(j2\pi f)e^{j2\pi ft}df = A\cdot\int_{-fc}^{+fc} e^{-j2\pi ft_0}e^{j2\pi ft}df = A\int_{0}^{+fc}\cos 2\pi f(t-t_0)df$$

où: $h(t)=A\cdot f_C\dfrac{\sin(2\pi f_c(t-t_0))}{2\pi f_c(t-t_0)}$



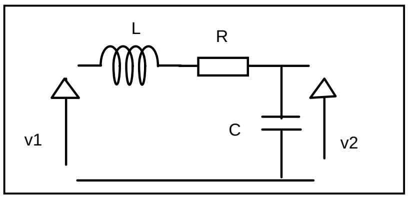

Fonction sinus cardinal qui n'est pas nulle pour t<0, le système répond avant d'être excité, il n'est pas causal donc non réalisable.

On peut montrer que tout système dont la fonction de transfert est discontinue ou possède une dérivée infinie en un point n'est pas causal .

## DEFINITION D'UNE FONCTION DE TRANSFERT

## Normalisation des Fonctions de transfert et des impédances

Considérons par exemple le filtre représenté sur la figure ci contre C'est un filtre passe bas car la self série s'oppose au passage des fréquences élevées qui sont de plus court-circuitées par le condensateur C . Sa fonction de transfert s'écrit:




$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{1}{Cp}}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

ou en ω $\frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ En remplaçant les lettres par leurs valeurs , les coefficients numériques risquent d'être très grands ou au contraire très petits. Utilisons alors le fait que ce circuit est constitué par une self et un condensateur qui définissent une fréquence particulière $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, introduisons le rapport Ω entre une pulsation ω et cette valeur particulière. La fonction de transfert s'écrit :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}}$$

mais pour un circuit accordé on défini également le coefficient de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$

L'expression ci dessus s'écrit alors : $H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j\frac{\Omega}{Q}}$

ou encore en p $H(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{1}{Q}p + 1}$ .Remarquons bien que tous les coefficients sont positifs, ce filtre est en effet évidemment stable.

Cette fonction de transfert est celle de tous les filtres ayant cette structure, c'est la **fonction de transfert normalisée** du filtre. Pour revenir à la fonction de transfert numérique il suffit d'introduire le Q et la fréquence de normalisation

La normalisation peut porter également sur la valeur des composants eux mêmes. C'est la normalisation des impédances.

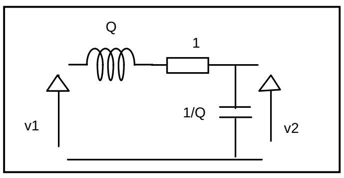
Il faut d'abord définir une unité $R_0$ de résistance , par exemple la résistance R elle même., l'unité de self $L_0$ est alors la self qui à la fréquence de normalisation choisie a pour module d'impédance $L_0\omega_0=R_0$ , c'est à dire $L_0=R_0/\omega_0$.

- De même l'unité de capacité $C_0$ est celle dont l'impédance à la fréquence de normalisation est $R_0$. $1/C_0\omega_0=R_0$ c'est à dire $C_0=1/R_0\omega_0$

Pour le montage considéré à partir de la définition du Q , $L=RQ/\omega_0$ mais $R=R_0$ par définition et $R_0/Q=L_0$ soit $L/L_0=Q$ la self à comme valeur normalisée Q .

De même $C=1/RQ\omega_0 = (1/Q)C_0$ le condensateur à comme valeur normalisée 1/Q.

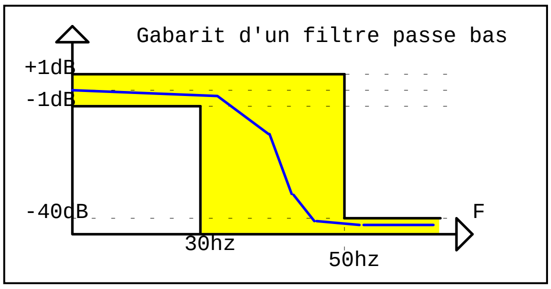
La forme normalisée du filtre est alors représentée ci contre:




## Gabarit d'un filtre

Un filtre harmonique est utilisé par un ingénieur pour éliminer ou atténuer certaines fréquences d'un signal, mais une élimination totale n'est jamais possible. Imaginons un signal basse fréquence dont le spectre s'étend du continu à 30Hz environ perturbé par le secteur 50Hz et ses harmoniques. Un filtre passe bas idéal n'étant pas réalisable, le filtre passe bas réel qui atténue au mieux les signaux parasites modifiera nécessairement si peu que ce soit le signal utile. On peut alors s'imposer les contraintes suivantes:

Aucune composante spectrale du signal utile de 0 à 30Hz ne doit pas être atténuée ou amplifiée de plus de 1dB, l'atténuation est par contre au moins égale à 40dB pour tous les harmoniques du secteur. Ceci est réalisé si la courbe de gain du filtre ( en bleu) se place dans la zone colorée de la figure ci contre. Les limites de cette zone constituent le **gabarit du filtre** .




## Comportement asymptotique

En ω la fonction de transfert d'un filtre s'écrit $H(j\omega)=\dfrac{b_k(j\omega)^k+......+b_0}{a_m(j\omega)^m+......a_0}$

Si la fréquence tend vers 0 H est nécessairement réel , positif ou négatif et vaut $b_0/a_0$

Si la fréquence tend vers l'infini $H(j\omega)\Rightarrow\dfrac{b_k}{a_m}(j\omega)^{(k-m)}$ c'est à dire que le gain tend vers

$\left|\dfrac{b_k}{a_m}\right|^{-(m-k)}$ en module , ( ne pas oublier que k<=m) , soit en décibels

$$H_{dB}=20\cdot\log(\frac{b_k}{a_m})-20(m-k)\log(\omega)$$

Lorsque la fréquence est multipliée par 10 , log(ω) augmente de 1 et le gain varie de 20.(m-k) dB .On dit que la pente est de -20.(m-k) dB par décade.

**Pour une fréquence suffisamment grande la pente du gain d'un filtre est toujours un multiple entier de 20dB par décade.**

D'autre par le terme $j^{-(m-k)}$ montre que **le déphasage limite est toujours un nombre entier de fois 90° .**

***Cas particulier des fonctions de transfert à pôles et zéros réels.***

Si les pôles et zéros sont réels la fonction de transfert peut se mettre sous la forme :

$$H(p)=A\cdot\frac{\prod_i(p-p_{zi})}{\prod_L(p-p_{pL})}\quad \text{ou en } \omega \quad H(j\omega)=B\cdot\frac{\prod_i\left(\frac{j\omega}{p_{Zi}}-1\right)}{\prod_L\left(\frac{j\omega}{p_{pL}}-1\right)}$$

C'est à dire en module et en phase:

$$|H| = |B| \frac{\prod_i \sqrt{\frac{\omega^2}{p_{zi}^2}+1}}{\prod_L \sqrt{\frac{\omega^2}{p_{pL}^2}+1}} \quad \text{et} \quad \varphi = \sum_i arctg \frac{-\omega}{p_{zi}} - \sum_L arctg \frac{-\omega}{p_{pL}}$$

En décibels le module vaut:

$$H_{dB} = 20 \cdot \log|B| + \sum_i 20 \cdot \log \sqrt{\frac{\omega^2}{p_{zi}^2}+1} - \sum_L 20 \cdot \log \sqrt{\frac{\omega^2}{p_{pL}^2}+1}$$

Notons bien que la contribution de chaque pôle et zéro aussi bien en module qu'en phase s'ajoute simplement aux autres. Considérons donc la contribution individuelle d'un pôle , puis d'un zéro.

***Pour un pôle:***

$$H_{dB} = C_{te} - 20 \cdot \log \sqrt{\frac{\omega^2}{p_p^2}+1}$$

La constante contient les contributions des autres pôles et zéros.

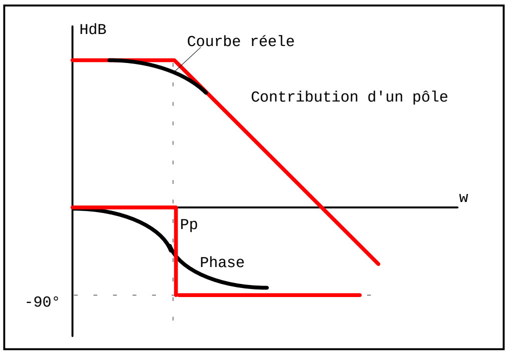
Pour les fréquences basses, $\omega \ll p_p$ le terme sous le radical est voisin de 1 et seul reste la constante. Le pôle considéré ne modifie pas le gain global.

Au contraire pour les fréquences hautes c'est à dire $\omega \gg p_p$ le 1 est négligeable et il reste :

$$H_{dB} = C_{te} + 20 \cdot \log(|p_p|) - 20 \cdot \log(\omega)$$ pente de -20 dB par décade.

En phase , pour $\omega \to 0$ $\varphi \to 0$ et pour $\omega \to \infty$ $\varphi \to -\pi/2$ car pour que le filtre soit stable il faut que $p_p$ soit négatif.

Ces résultats permettent de tracer la contribution d'un pôle unique, la courbe en rouge est son comportement asymptotique.



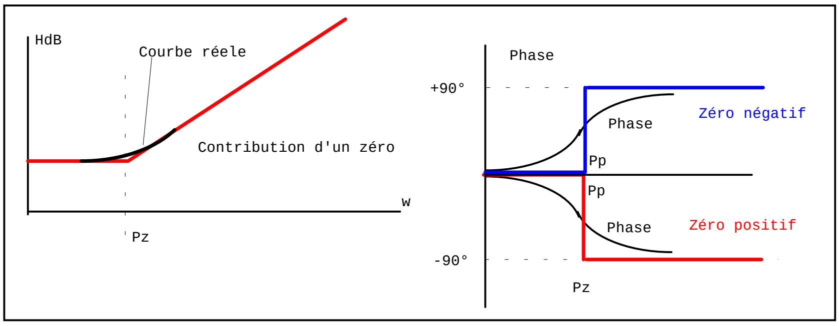

***Pour un zéro***

Pour le module le comportement est semblable au signe près. Le gain au delà du zéro monte de 20dB par décade au lieu de diminuer,:

Pour $\omega \ll p_Z$ H = Cte

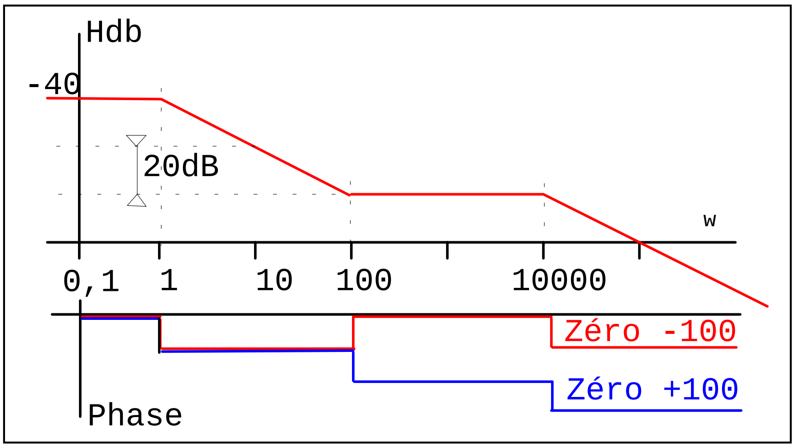
Pour $\omega \gg p_z$ $H_{dB} = C_{te} - 20 \cdot \log(p_Z) + 20 \cdot \log(\omega)$

Pour la phase $\varphi = -arctg \frac{\omega}{p_L}$ , à fréquence nulle elle est nulle, mais pour les fréquences élevées elle tend vers +90° si le zéro est négatif et vers -90° s'il est positif , ici aucune condition de stabilité n'impose son signe.




***Filtre à déphasage minimal, formule de Bode***

Soit la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{p+100}{(p+1)(p+10000)}$ elle possède un zéro pour p=100 et deux pôles p=1 et 10000 suffisamment éloignés l'un de l'autre pour que le tracé asymptotique soit proche du tracé réel. Pour $\omega < 1$ le gain est indépendant de la fréquence, il diminue de 20 dB par décade au delà de $\omega$=1 (pôle 1) puis se redresse et redevient indépendant de f au delà de $\omega$=100 grâce à l'influence du zéro , et enfin diminue de nouveau de 20dB par décade au delà du dernier pôle $\omega$=10000. D'ou la courbe ci dessous.




En ce qui concerne la phase, le zéro étant négatif, ce dernier introduit au delà de 100 un déphasage de +90° qui compense les -90° dus au pôle 1. Le déphasage limite pour $\omega$ grand est donc -90° . Si l'on considère maintenant la fonction de transfert ayant un zéro positif:

$$H(p) = \frac{p-100}{(p+1)(p+10000)}$$

le module du gain est inchangé mais la courbe de phase est différente, le déphasage à l'infini passe à -270° .

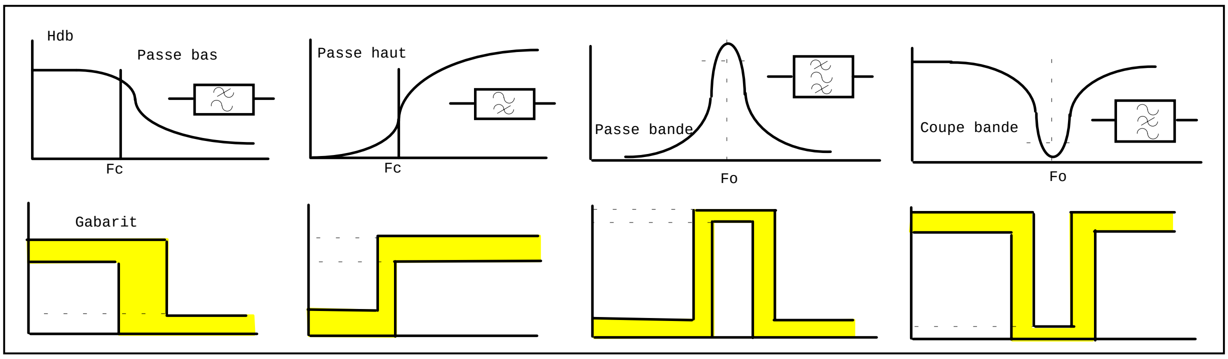
On voit donc à partir de cet exemple qu'il n'est pas possible de déduire le déphasage à partir de la courbe de module du gain. En effet les deux fonctions de transfert précédentes ont un gain identique en module et des phases différentes. Bode à montré que si une fonction de transfert n'a pas de zéro à partie réelle positive il existe une expression permettant de passer du module à la phase:

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log|H(u)| - \log|\omega|}{u^2-\omega^2}du$$

Les fonctions de transfert possédant cette propriété sont appelées **fonctions à déphasage minimal.**

## Classification des fonctions de transfert - Prototypes passe bas

Les filtres sont classés en passe bas , passe haut, passe bande et coupe bande .Les courbes de gain correspondantes sont reproduites ci dessous ainsi que les gabarits .




Il existe des catalogues de filtres précalculés permettant de matérialiser une fonction de transfert dont on impose les paramètres principaux. Cependant dans certains cas un catalogue réduit aux seuls passe bas suffit , car il est facile de passer de ce passe bas à tout autre filtre par une opération algébrique simple. Cette opération est une **transposition de fréquence** .le passe bas de départ est appelé **prototype passe bas** .

# Transpositions de fréquence

**<u>Passe bas ⇒passe haut</u> .**

Soit $H_B(p)$ la fonction de transfert du prototype passe bas de départ. Effectuons la transformation algébrique $p \Rightarrow \omega_O/p$ , nous obtenons :

$$H(p)=H_B(\omega_0/p)$$

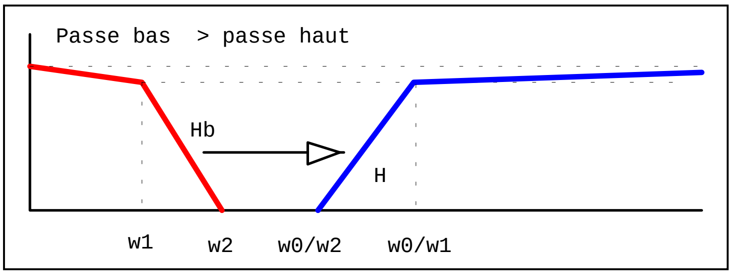
Pour une pulsation $\omega_1$ le prototype passe bas à un gain en module $|H_B(j\omega_1)|$, cherchons pour quelle fréquence $\omega$ le filtre transformé a le même gain. Il faut résoudre :

$$|H_B(j\omega_1)| = |H(j\omega)| = |H_B(\omega_0/j\omega)|$$

Le module d'une fonction de transfert étant le même pour deux valeurs de $\omega$ de signes opposés (symétrie hermitienne ) , l'égalité entre les deux termes extrêmes permet d'écrire:

$$\omega = \pm\omega_0/\omega_1$$

D'ou la figure ci contre. A $\omega_1=0$ correspond $\omega=\infty$ , c'est bien un passe haut.

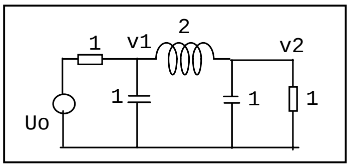



***Synthèse du filtre obtenu :***

Partons à titre d'exemple du prototype passe bas de fonction de transfert :

$$H_B(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

dont la structure physique est représentée ci contre .( Filtre passif sans pertes sous forme normalisée la pulsation de coupure est 1 ).



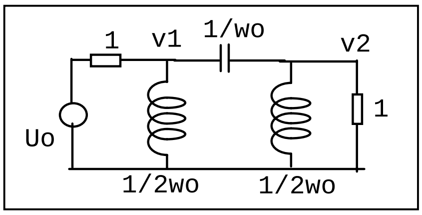

Le filtre passe haut correspondant aura comme fonction de transfert :

$$H(j\omega)\frac{p^3}{p^3+2p^2+2p+1}$$

Quelle est alors sa structure ?

Comme nous le verrons plus loin la synthèse directe à partir de cette expression est difficile ,or elle a été obtenue en transformant p en $\omega_0/p$ dans l'expression de $H_B(p)$ que l'on peut elle même obtenir en appliquant les lois de Kirshoff au schéma ci dessus. Le plus simple est alors d'effectuer cette transformation non pas sur H mais directement sur la valeur des composants.

Une self d'impédance Lp se transforme en $L\omega_0/p$ c'est à dire un condensateur de valeur $1/L\omega_0$., un condensateur d'impédance 1/Cp devient $p/C\omega_0$ c'est à dire une self $1/C\omega_0$




Le schéma du passe haut s'obtient donc en remplaçant un condensateur par une self et réciproquement. Le résultat est présenté ci contre.

**<u>Passe bas ⇒ passe bande</u>**

C'est le cas le plus intéressant. On effectue sur $H_B(p)$ la transformation $p \Rightarrow p+\omega_0^2/p$.

A une fréquence $\omega_1$ le prototype passe bas à une fonction de transfert de module $|H_B(j\omega_1)|$, cherchons pour quelle fréquence $\omega$ le filtre transformé aura le même gain. La condition s'écrit cette fois :

$$\left|H_B(j\omega_1)\right| = \left|H(j\omega)\right| = \left|H_B(j\omega + \frac{\omega_0^2}{j\omega})\right|$$

Les deux termes en $H_B$ ont même module si : $j\omega_1 = \pm\left(j\omega + \dfrac{\omega_0^2}{j\omega}\right)$ , c'est à dire

$$\pm\,\omega_1 = \omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}$$

Ce qui conduit à 2 équations du second degré dont les solutions positives sont:

$$\omega' = \frac{\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

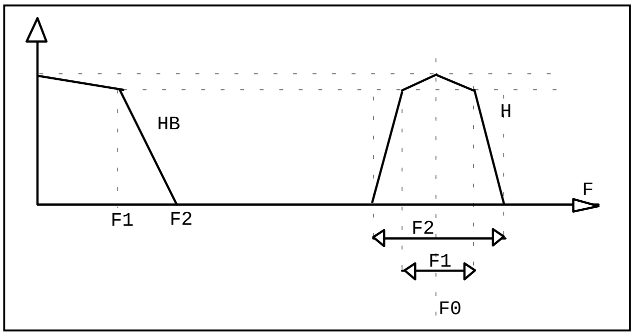
$$\omega'' = \frac{\sqrt{\omega_1^2 + 4\omega_0^2} - \omega_1}{2}$$

valeurs compliquées mais dont le produit est $\omega'\omega'' = \omega_0^2$

et la différence :

$$\omega' - \omega'' = \omega_1$$

**Le filtre transformé à même module que le prototype passe bas pour deux fréquences distantes de $\omega_1$ et dont $\omega_0$ est la moyenne géométrique .**




Ce résultat important est illustré par la figure ci contre.

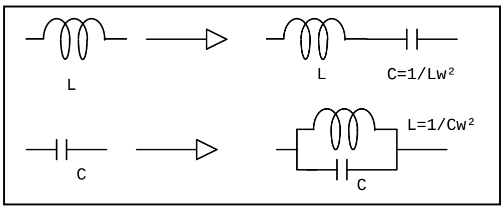
La synthèse du filtre transformé s'effectue suivant le même principe que pour la transformation précédente. On effectue la transformation directement sur les impédances.

Un condensateur 1/Cp devient une impédance : $\dfrac{1}{C\left(p + \dfrac{\omega_0^2}{p}\right)}$

C'est le même condensateur C en parallèle avec une self telle que l'ensemble constitue un circuit résonnant accordé sur $\omega_0$.

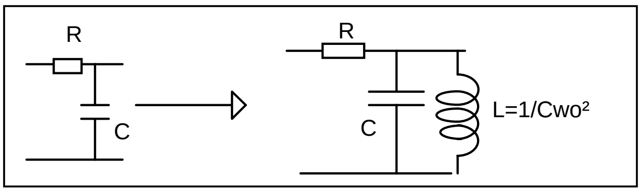
De même une self Lp se transforme en la même self en série avec un condensateur dont la valeur est telle que le circuit résonnant série constitué est accordé sur la fréquence centrale $\omega_0$.

$$Lp \Rightarrow L\left(p + \frac{\omega_0^2}{p}\right)$$




Cette transformation peut être utilisée dans l'autre sens de façon à faire correspondre à un filtre passe bande son prototype passe bas équivalent

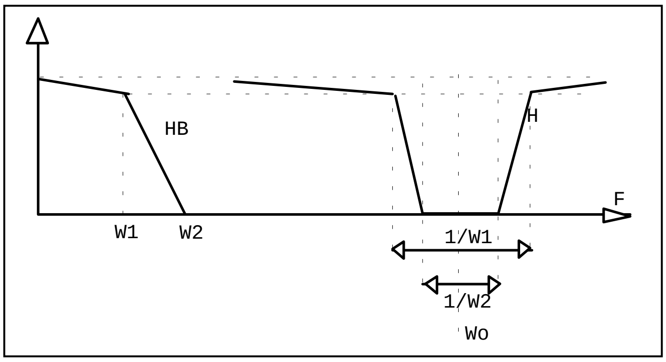
***. Attention ceci n'est possible que si la fonction de transfert du passe bande possède une symétrie géométrique autour de sa fréquence centrale.***




***Remarque*** : Un filtre intégrateur RC et un circuit résonnant parallèle sont transformés l'un de l'autre et le passe bande possède autour de sa fréquence centrale une largeur de bande à -3dB égale à 1/RC fréquence de coupure à -3dB de l'intégrateur RC .

***Transformation passe bas ⇒ coupe bande***

Cette transformation bien moins utile que la précédente est réalisée en effectuant le remplacement $p \Rightarrow \dfrac{1}{p+\dfrac{\omega_0^2}{p}}$ , elle a des propriétés semblables.




## LES PROTOTYPES PASSE BAS

Nous nous limiterons aux filtres polynomiaux c'est à dire ceux dont le numérateur de la fonction de transfert est une constante.

La propriété qui sera considérée est le comportement du gain dans la bande passante et dans la bande atténuée.

Si l'on veut par exemple placer un filtre à l'entrée d'un appareil de mesure tel un voltmètre , (de toute façon l'amplificateur interne de ce voltmètre ou même son galvanomètre à cadre mobile se comportent comme des filtres passe bas.) son gain doit être aussi constant que possible dans la bande passante de façon que l'amplitude d'une tension mesurée ne soit pas entachée d'une erreur due à la fréquence. Une première catégorie de filtres satisfait à ces conditions, leur gain, maximum pour la fréquence nulle, est le plus constant possible dans la bande passante. Ils obéissent au **critère du méplat** ( en anglais maximaly flat ).Mathématiquement la courbe de gain présente un maximum de dérivées nulles pour f=0.**Ce sont les filtres de Butterworth** .

Lorsque le signal utile à une fréquence constante mais se trouve mélangé avec des signaux parasites de fréquences plus élevées, la constance du gain dans la bande passante n'est plus le critère fondamental, par contre au delà de la fréquence de coupure le gain doit descendre le plus vite possible pour atténuer au mieux les termes nuisibles**. Les filtres de Tchebytchev** ont un gain qui peut varier de Δ dB dans la bande passante mais , au delà de la fréquence de coupure , chute beaucoup plus vite que dans le cas précédent.

On a vu que la condition de non distorsion était une variation linéaire de la phase en fonction de la fréquence. C'est un filtre dont l'évolution de la phase possède cette propriété qu'il faudrait placer à l'entrée d'un oscilloscope dont le rôle est de visualiser les signaux**. Les filtres de Bessel** possèdent pour un degré donné une phase la plus linéaire possible, mais cette qualité se fait au détriment de la vitesse de chute du gain au delà de la fréquence de coupure.

# Critère du Méplat Filtres de Butterworth

On impose que $X(\omega) = |H(j2\pi f)|^2$ ait pour ω=0 le maximum de dérivées nulles.

Remarquons d'abord que si les dérivées de l'atténuation A=1/X sont nulles celles de X le sont aussi .

*En effet la dérivée de 1/X est $-X'/X^2$ , pour f=0 X(0)=1 gain en continu , pour que la dérivée soit nulle il faut que X' le soit.*

*De même la dérivée seconde $-(X''X^2-2XX'^2)/X^4$ ne peut être nulle à l'origine que si X' et X'' le sont , et ainsi de suite.*

Nous considérerons donc l'atténuation $1/|H|^2$ .La fonction de transfert du filtre polynomial de degré n est de la forme : $H(p)=\dfrac{1}{a_n p^n+.....+a_0}$

Donc l'inverse de son module au carré : $A(f)=A_{2n}f^{2n}+A_{2n-2}f^{2n-2}+.....+A_2 f^2+A_0$

Posons g = f² $A(g)=A_{2n}g^n+A_{2n-2}g^{n-1}+.....+A_2 g+A_0$

Si les dérivées à l'origine de A par rapport à g sont nulles celles de A par rapport à f le sont aussi.

$\dfrac{dA}{dg}=\dfrac{dA}{df}\dfrac{df}{dg}=\dfrac{dA}{df}\dfrac{1}{2f}$ *ne peut être nul pour f=0 que si da/df l'est et ainsi de suite aux ordres plus élevés.*

Ecrivons que toutes les dérivées de A sont nulles :

. $$\left(\frac{dA}{dg}\right)_0=A_2=0$$

au second ordre:

$$\left(\frac{d^2A}{dg^2}\right)_0=A_4=0$$

etc , finalement tous les coefficients doivent être nuls sauf $A_0$ et $A_{2N}$ D'ou l'expression de la fonction de transfert maximaly flat : $|H(f)|^2=\dfrac{K}{A_{2n}f^{2n}+A_0}$ qui peut se mettre sous la forme:

$|H(\omega)|^2=\dfrac{K}{\omega^{2n}+\omega_0^{2n}}$ ou en normalisant $\omega_0$=1 : $|H(\omega)|^2=\dfrac{K}{\omega^{2n}+1}$

ou en p puisque p=j$\omega$ donc $p^2=-\omega^2$ $|H(p)|^2=\dfrac{K}{(-1)^n p^{2n}+1}$

Mais il ne s'agit que du carré du module de la fonction de transfert.

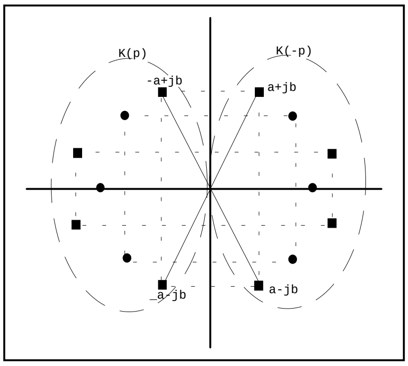
***Reconstruction d'une fonction de transfert à partir de son module.***

Soit $F(p^2)=|H(j2\pi f)|^2$

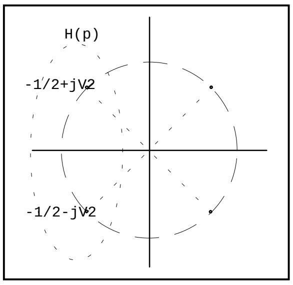
La fonction de transfert étant celle d'un système réel, ses coefficients sont réels et le carré de son module étant pair |H(p)|=|H(-p)|

$F(p^2)$ ne contient que les puissances paires de p.

Soit a+jb un pôle ou zéro de $F(p^2)$ , ses coefficient étant réel -a+jb l'est aussi. Mais la fonction étant paire -a-jb et +a-jb le sont également .Les pôles et zéros se groupent par 4 (sauf ceux qui sont sur l'un des axes), on parle de **répartition quadrantale.**




Formons alors une fraction rationnelle K(p) en regroupant les pôles et zéros de $F(p^2)$ qui se trouvent à gauche de l'axe imaginaire., K(-p) est évidemment obtenu en regroupant les pôles et zéros situés à droite. Or $K(p).K(-p)=F(p^2)$ , K est une fonction de transfert stable et à déphasage minimal qui satisfait aux conditions.




Appliquons cette méthode aux filtres maximaly flat. Il faut considérer 2 cas suivant la parité de n . Pour n pair $|H(p)|^2=\dfrac{K}{p^{2n}+1}$ les pôles sont les racines 2 n iemes de -1 $p = \sqrt[2n]{-1} = e^{j(\frac{\pi}{2N}+k\frac{\pi}{N})}$

Exemple pour n=2:

Les deux pôles de $F(p^2)$ à gauche de l'axe imaginaire sont $-\sqrt{2}/2+j\sqrt{2}/2$ et $-\sqrt{2}/2-j\sqrt{2}/2$ d'ou

$$H(p) = \frac{K}{(p+\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{2}}{2})(p+\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$H(p) = \frac{K}{p^2+\sqrt{2}p+1}$$ C'est le filtre de Butterworth de second ordre.

Pour n impair les pôles sont racines 2niemes de +1 $p = \sqrt[2N]{1} = e^{(j\frac{K\pi}{N})}$

Exemple n=3 . Les racines sixièmes de 1 sont -1 et $-0,5\pm j\sqrt{3}/2$, qui regroupées donnent la fonction de transfert du filtre de Butterworth du troisième ordre. $H(p) = \dfrac{K}{p^3+2p^2+2p+1}$

### Propriétés des filtres de Butterworth

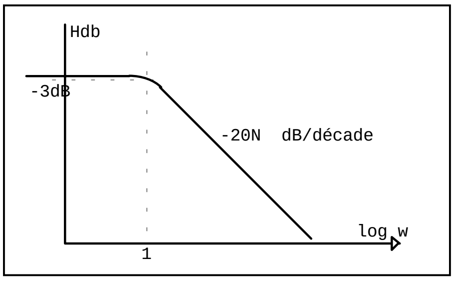
Elles sont déduites de l'expression du module normalisé . $|H(j\omega)| = \dfrac{K}{\sqrt{\omega^{2N}+1}}$

Ou en décibels : $H_{dB}=-10\log(\omega^{2N}+1)$

Si $\omega \ll 1$ Hdb=Cte

Si $\omega \gg 1$ Hdb=-20N.log$\omega$ et pour $\omega$=1 H=$\sqrt{2}/2$) soit -3dB **quel que soit N**.

Comme il a été démontré plus haut le déphasage pour une fréquence infinie est de -90N degrés , il est facile de calculer que ce déphasage est moitié, soit -45N degrés, pour la fréquence de coupure.




## Filtres de Tchebytcheff

Pour un degré fixé la pente de leur gain à la fréquence de coupure est beaucoup plus grande que celle des filtres de Butterworth mais le prix à payer est une ondulation du gain dans la bande passante.

Le module de la fonction de transfert est de la forme : $|H(j\omega)|^2 = \dfrac{1}{1+\varepsilon^2 T_n^2(\omega)}$

Ou $\varepsilon$ est une constante positive et $T_n(\omega)$ est un polynôme de Tchebytchef de degré n défini par :

$T_n(x) = \cos[\arccos x]$ pour x<=1

et $T_n(x) = ch[\arg ch x]$ pour x >1

En utilisant les formules de trigonométrie classique on peut montrer que :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$T_n^2(x) = \frac{1}{2}[T_{2n}(x)+1]$$

$$avec \rightarrow T_0(x) = 1 \cdot \cdot T_1(x) = x$$

| n | Tn(x) | dTn(x)/dx |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | x | 1 |
| 2 | $2x^2-1$ | $4x$ |
| 3 | $4x^3-3x$ | $12x^2-3$ |
| 4 | $8x^4-8x^2+1$ | $24x^3-16x$ |
| 5 | $16x^5-20x^3+5x$ | $80x^4-60x^2+5$ |
| 6 | $32x^6-48x^4+18x^2-1$ | $192x^5-192x^3+36x$ |

Le tableau ci contre présente les premiers polynômes de

Tchebytchef ainsi que leur dérivée.

## Propriétés des filtres de Tchebytchef

Les fonctions de transfert de Tchebytchef dépendent d'un paramètre ε , il y a donc pour un degré donné autant de filtres que de valeurs de ce paramètre. Dans la bande passante le gain a une évolution sinusoïdale, il varie de 1 à $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ,remarquons que pour n pair Tn(0)=1 , le gain en continu est donc $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ , il est par contre égal à 1 pour n impair. (Figure ci dessous ) . L'ondulation dans la bande s'exprime le plus souvent en décibels : $\Delta_{dB} = 10 \cdot \log(1+\varepsilon^2)$ soit $\varepsilon = \sqrt{(10^{\frac{\Delta}{10}} - 1}$

| ΔdB | ε |
|---|---|
| 1 | 0,508 |
| 2 | 0,764 |
| 3 | 1 |
| 6 | 1,72 |

Le tableau des polynômes montre que lorsque la fréquence tend vers l'infini, comportement asymptotique, $T_n(x) \rightarrow 2^{n-1} x^n$

Alors $|H(\omega)| \rightarrow \frac{1}{\varepsilon 2^{n-1} \omega^n}$

Soit $H_{dB} = -20Log(\varepsilon) - 20(n-1)Log2 - 20Log\omega$

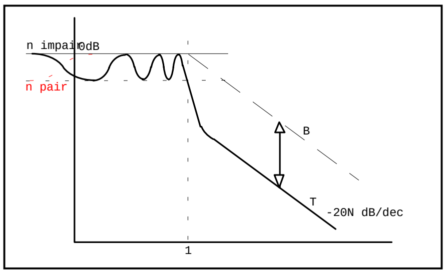
Le dernier terme est le gain du Butterworth, Pour les fréquences élevée la courbe du Tchebytchef est en dessous de celle du Butterworth de même degré , l'atténuation supplémentaire étant :

A=-20 log(ε)-6(n-1)

Le tableau suivant donne la valeur de cette atténuation supplémentaire pour 3 filtres de Tchebytchef d'ondulation 1 3 et 6 dB

| Atténuation supplémentaire | | | |
|---|---|---|---|
| n→ | 3 | 5 | 7 |
| 1dB | 6 | 18 | 30 |
| 3dB | 12 | 24 | 36 |
| 6dB | 17 | 29 | 41 |

Pour prévoir le comportement de la courbe de gain au delà de la fréquence de coupure, il est intéressant de calculer sa pente pour ω=1.Le résultat est simple et montre combien cette pente est grande dès que le degré est supérieur à 3 .




$$H_{dB} = -10 \cdot Log(1+\varepsilon^2 T_n^2(x))$$

La pente cherchée ,exprimée en dB par décade est : $\frac{dH_{dB}}{d\log x}$

Soit : $\frac{dH_{dB}}{dx} = -20x \frac{\varepsilon^2 T_n(x)}{1+\varepsilon^2 T_n^2(x)} \frac{dT_n(x)}{dx}$

Or on peut constater sur le tableau précédent que pour x=1 la dérivée de $T_n(x)$ vaut $n^2$. Soit :

$$\left(\frac{dH_{dB}}{d(\log x)}\right)_{x=1} = \frac{-20N^2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}$$

| | Pente à l'infini | Pente à la coupure pour | | |
|---|---|---|---|---|
| Degré | DB/décade | Δ=1dB | Δ=2dB | Δ=3dB |
| 3 | 60 | 37 | 66 | 90 |
| 4 | 80 | 66 | 118 | 160 |
| 5 | 100 | 103 | 184 | 250 |
| 6 | 120 | 148 | 265 | 360 |
| 7 | 140 | 201 | 361 | 490 |
| 8 | 160 | 263 | 472 | 640 |

Le tableau ci contre montre combien la pente peut être raide .Ainsi pour un Tchebytchef 3db de degré 5 le gain asymptotique est de 24dB inférieur à celui d'un Butterworth de même degré et la pente à la coupure est de 250dB par décade contre 50 seulement pour le Butterworth.

*Remarques :*

*Pour un filtre de Tchebytchef la pulsation unité ne correspond pas à un gain de –3dB., cette pulsation n'est donc pas la fréquence de coupure à –3dB définie le plus souvent pour les amplificateurs*

*On a montré plus haut que les pôles de la fonction de transfert de Butterworth étaient sur un cercle de rayon 1 dans le plan complexe, on peut démontrer que ceux d'une fonction de Tchebytchef sont sur une ellipse d'autant plus aplatie que le $\varepsilon$ est grand.*

## Filtres de Bessel

Une fonction de transfert ayant une phase rigoureusement linéaire aurait comme fonction de transfert $Ae^{-p\tau}$ ou $\tau$ est le retard infligé au signal d'entrée. Mais ce n'est pas une fraction rationnelle en p , un tel filtre n'est donc pas réalisable .Les filtres de Bessel sont des filtres dont la fonction de transfert pour un degré donné est la meilleure approximation possible de l'exponentielle précédente.

La démarche est la suivante :

$$e^{-p} = \frac{1}{chp + shp}$$

mais $\coth(p) = \dfrac{chp}{shp} = \dfrac{1 + \frac{p^2}{1.2} + \frac{p^4}{1.2.3.4} + \ldots}{p + \frac{p^3}{1.2.3} + \frac{p^5}{1.2.3.4.5} + \ldots} = \dfrac{1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{7}{p} + \cfrac{1}{.....}}}}$

En se limitant par exemple au 3eme ordre :

$$\coth(p) = \frac{chp}{shp} = \frac{1}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{p} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{p} +}} = \frac{6p^2 + 15}{p^3 + 15p}$$

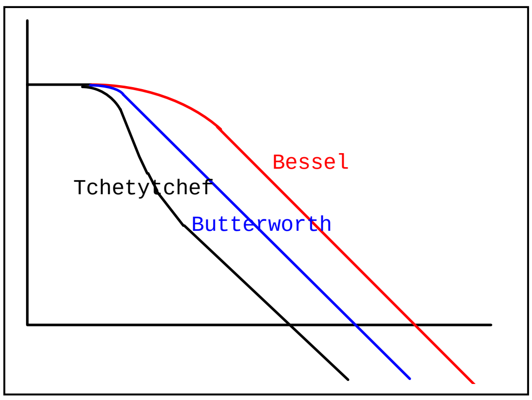
On identifie alors $chp \approx 6p^2 + 15 \cdots$

$shp \approx p^3 + 15p$

d'ou l'approximation de l'exponentielle : $e^{-p} \approx \dfrac{1}{p^3 + 15p + 6p^2 + 15}$

La fonction de transfert doit avoir un gain unité pour le continu d'ou la fonction de transfert du filtre de Bessel du troisième ordre :

$$H(p) = \frac{15}{p^3 + 15p + 6p^2 + 15}$$




On voit que pour une fréquence grande le gain tend vers $15/p^3$ il est 15 fois supérieur à celui du Butterworth de même degré.

Les filtres de Bessel ont une atténuation qui varie au delà de la fréquence de coupure beaucoup plus lentement que ceux de Butterworth Pour cette raison ils sont rarement utilisés sauf lorsque la linéarité de la phase est essentielle .

Le polynôme dénominateur est un polynôme de Bessel, on peut montrer que :

$$B_n(p) = (2n-1)B_{n-1}(p) + p^2 B_{n-2}(p)$$
$$B_0 = 1 \cdots\cdots B_1(p) = p+1$$

Formule de récurrence permettant facilement de construire les polynômes successifs.

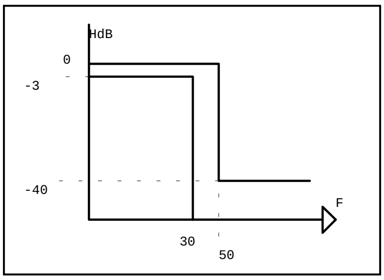
## Exercice :

*Soit un signal utile dont les composantes spectrales sont comprises entre 0 et 30 Hz perturbé par un bruit provenant du rayonnement des fils secteur , ce bruit a un spectre de raies de fréquences multiples de 50Hz. Nous nous imposons de ne pas atténuer le signal utile de plus de 3dB mais d'atténuer les signaux parasites d'au moins 40dB. Le gabarit du filtre à réaliser est alors représenté ci contre.*

*Essayons d'abord de résoudre le problème avec un filtre passe bas de Butterworth. Le gain du filtre doit entre 30 et 50Hz chuter d'au moins 40dB.Or entre ces deux fréquences il y a log(50/30)=0,222 décades, la pente de la courbe de gain doit donc être au moins de :*

*40/0,222=180 dB/décade*

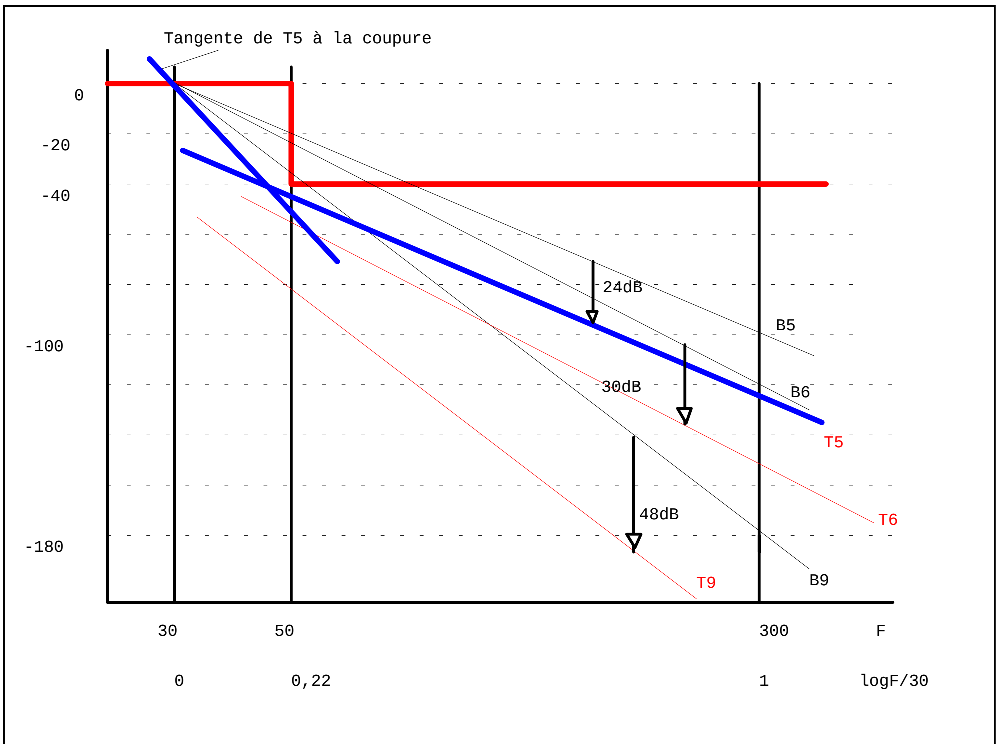
*Il nous faut donc , et ce sera juste, un filtre du 9eme ordre.*




*Essayons maintenant avec un filtre de Tchebytchef.Pour respecter le cahier des charges dans la bande passante nous prendrons un Tchebytchef 3dB. A l'ordre 9 l'atténuation supplémentaire par rapport au Butterworth est de -48dB Pour une fréquence de 50Hz soit 0,22 décade au delà de la coupure l'atténuation sera proche de 40+48=88dB beaucoup plus que ce qui est exigé. Essayons l'ordre 6 seulement :*

*Au bout de 0,22 décade le Butterworth chute de 20x6x0,22=26,4db soit 13,6 db de moins que ce qui est demandé, mais un Tchebytchef 3dB d'ordre ajoute 30 db .L'asymptote du Tchebytchef passe donc a -26,4-30=-56dB ce qui est suffisant. (Figure ci contre ) .*

*A l'ordre 5 le Butterworth est à -20x5x0,22=-22dB et l'atténuation supplémentaire du Tchebytchef 24dB soit –46db .Donc à priori un Tchebytchef 3dB du 5eme ordre suffit .Pour le confirmer traçons la pente du gain à la coupure d'un tel filtre, elle vaut 250dB/décade .La figure ci contre montre que ce choix est certainement judicieux.*




Détermination du filtre compatible avec le gabarit