

Filtres actifs

Références: Paul Bildstein, Filtres actifs

1 Généralités et définitions

Objectifs du cours : apprendre à calculer des filtres actifs avec une structure de type "contre-réaction multiple".

1.1 Définitions, notations

Fonction de transfert de filtre : $H(S)$, $\underline{H}(f)$, avec :

$$S = \frac{s}{\omega_0} \quad (1)$$

- ω_0 : pulsation de référence
- s : variable de Laplace
- S : variable de Laplace normée

En régime harmonique, $s=j\omega$, donc :

$$S = \frac{s}{\omega_0} = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = j \cdot \frac{f}{f_0} = j \cdot \Omega \quad (2)$$

- f_0 : fréquence de référence
- Ω : pulsation (ou fréquence) normée

Exemple : Filtre passe-bas du premier ordre.

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot 2\pi f \tau} \quad (\tau : \text{constante de temps})$$

$$H(f) = \frac{1}{1 + j \cdot \frac{f}{f_0}} \quad (f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} : \text{fréquence de coupure } -3 \text{ dB})$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1 + j \cdot \Omega}$$

1.2 Fonctions de transfert

Toute fonction de transfert a l'allure suivante :

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \cdot \frac{\prod \left(s^2 + \frac{\omega_{zi}}{q_{zi}} \cdot s + \omega_{zi}^2 \right) \cdot \prod (s - z_i)}{\prod \left(s^2 + \frac{\omega_{pi}}{q_{pi}} \cdot s + \omega_{pi}^2 \right) \cdot \prod (s - p_i)} \quad (3)$$

Filtres actifs

Les pôles (valeurs de s pour lesquelles $D(s)$ s'annule) et les zéros (valeurs de s pour lesquelles $N(s)$ s'annule) peuvent être réels ou complexes.

S'ils sont complexes, alors ils sont conjugués deux à deux, puisque les coefficients des polynômes définis par (3) sont réels. En d'autres termes, si $P1$ est un pôle de $H(s)$, alors $P1^*$ en est un également.

Les pôles doivent absolument avoir une partie réelle négative, sans quoi la fonction de transfert est instable. Cela signifie que les pôles doivent se situer dans le demi-plan de Laplace "de gauche" ($\text{Re}(s) < 0$) (voir Figure 1).

Il est préférable que les zéros se situent également dans le demi-plan de Laplace de gauche pour que la phase de $H(s)$ reste minimale.

Les éléments ω_{pi} et q_{pi} se définissent de la manière suivante (les éléments ω_{zi} et q_{zi} se définissent de manière strictement identique) :

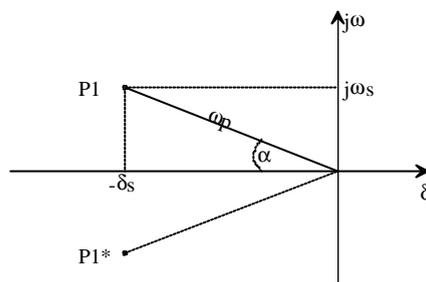


Figure 1

$$\omega_p = \sqrt{\delta_s^2 + \omega_s^2}$$

$$q_p = \frac{\omega_p}{2 \cdot \delta_s} = \frac{1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \quad (4)$$

L'ordre n d'un filtre est donné par son **nombre de pôles**. Si n est impair, alors il existe au moins un pôle défini uniquement par sa partie réelle $-\delta_s$ et sans conjugué complexe. Ce type de pôle génère une cellule de premier ordre (voir §1.3).

1.3 Types de facteurs

Les deux types de facteurs nécessaires à la réalisation d'un filtre d'ordre n sont les suivants :

$$k \cdot \frac{1 + a_n \cdot s}{1 + a_d \cdot s} \quad \rightarrow \text{cellule du premier ordre (1 pôle réel)}$$

$$k \cdot \frac{1 + a_n \cdot s + b_n \cdot s^2}{1 + a_d \cdot s + b_d \cdot s^2} \quad \rightarrow \text{cellule du deuxième ordre (2 pôles conjugués)}$$

Filtres actifs

Filtre complet :

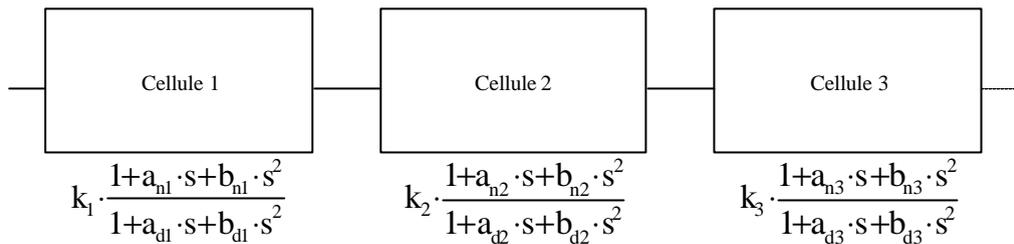


Figure 2

La mise en cascade des cellules donnera le produit des différentes fonctions de transfert si l'entrée d'une cellule ne perturbe pas la cellule précédente. Autrement dit si les cellules ont de grandes impédances d'entrée et de faibles impédances de sortie, ce qui est le cas avec des cellules actives utilisant des amplificateurs opérationnels ou des circuits à capacités commutées.

Dans la conception d'un filtre à plusieurs cascades, la répartition des gains $k_{tot} = k_1 \cdot k_2 \dots$ doit être faite de manière très soignée, afin d'éviter toute saturation de l'ampli sur l'une des cellules (voir également le §3.1 page 42).

Une cellule du premier ordre est réalisée par un pôle réel, et une cellule du second ordre est réalisée en regroupant deux pôles conjugués (et éventuellement aussi deux zéros conjugués). Par exemple, pour une cellule de type passe-bas ne comportant pas de zéros ($N(s) = K$), on calcule :

$$K \cdot \frac{-p_1}{s - p_1} \cdot \frac{-p_1^*}{s - p_1^*} = \frac{K \cdot p_1 \cdot p_1^*}{s^2 - (p_1 + p_1^*) \cdot s + p_1 \cdot p_1^*} = \frac{K \cdot |p_1|^2}{s^2 - 2 \cdot \text{Re}(p_1) \cdot s + |p_1|^2} = \frac{K \cdot \omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{q_p} \cdot s + \omega_p^2} \quad (5)$$

On a admis ici un gain K lorsque $s=0$, ce qui est une situation typique pour une cellule passe-bas sans zéro.

La démonstration de (5) est identique si la cellule comporte des zéros ($N(s) \neq K$). La Figure 3 montre comment regrouper les pôles pour décomposer une fonction de transfert en cellules de premier et second ordres. A noter que deux zéros ont été intégrés à la cellule de second ordre de droite.

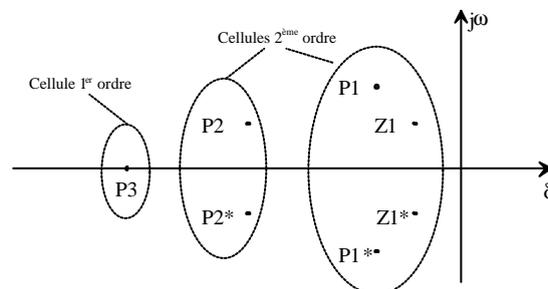


Figure 3

1.4 Fonctions de transfert pour un filtre

Le filtre est amené à remplir certaines exigences, par exemple :

- Bonne réponse indicielle (aussi carrée que possible).
- Peu de distorsion d'amplitude dans la bande passante.
- Peu de distorsion de phase dans la bande passante.
- Affaiblissement aussi brutal que possible après la fréquence de coupure.

Malheureusement toutes ces conditions ne peuvent pas être remplies en même temps. Différents types ont été calculés et optimisés pour certaines conditions seulement.

Types	Critères (voir figures en annexe)
Amortissement critique	Réponse indicielle assez carrée sans dépassement.
Bessel	Réponse indicielle optimale (petit dépassement, distorsion de phase minimale).
Butterworth	Réponse en amplitude plate jusqu'à la fréquence de coupure.
Tchebycheff	Meilleur affaiblissement après la coupure, léger 'rippel' dans la bande passante. La distorsion de phase est plus forte que pour les types précédents.
Elliptique	Affaiblissement maximal après la coupure, au prix d'une distorsion de phase plus forte.

Tableau 1

1.5 Conception d'un filtre passe-bas

On définit le filtre passe-bas par son affaiblissement. Le résultat, illustré par la Figure 4, est donné par un gabarit.

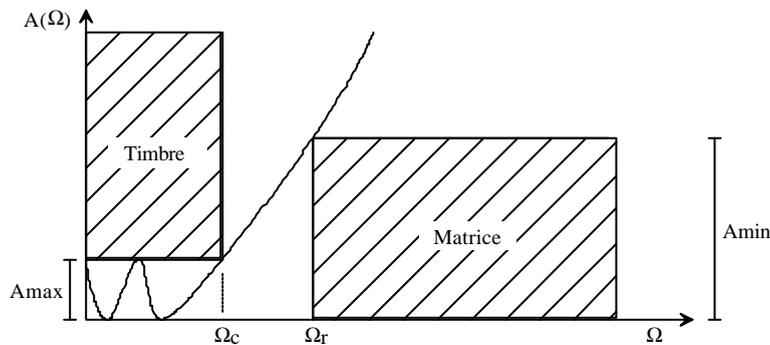


Figure 4

- Ω_c Pulsation normée de coupure.
- Ω_r Pulsation normée de réjection.
- A_{max} Définit l'affaiblissement maximal dans la bande passante.
- A_{min} Définit l'affaiblissement minimal dans la bande de réjection.

1.5.1 Filtre à amortissement critique

Le filtre est conçu uniquement avec des cellules de premier ordre. Sa fonction de transfert est de la forme (voir la définition de S majuscule en (2)) :

$$H(S) = \frac{1}{(1 + \alpha_1 \cdot S) \cdot (1 + \alpha_2 \cdot S) \cdot \dots \cdot (1 + \alpha_n \cdot S)} \quad (6)$$

On voit que les filtres à amortissement critique n'ont pas de zéros.

1.5.1.1 Dimensionnement du filtre à amortissement critique

En combinant (2) et (6), et en admettant que les facteurs α sont tous identiques, on trouve pour la réponse en amplitude :

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_1^2 \cdot \Omega^2} \cdot \sqrt{1 + \alpha_2^2 \cdot \Omega^2} \cdot \dots \cdot \sqrt{1 + \alpha_N^2 \cdot \Omega^2}} \quad (7)$$

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{(\sqrt{1 + \alpha^2 \cdot \Omega^2})^N} = \frac{1}{(1 + \alpha^2 \cdot \Omega^2)^{\frac{N}{2}}}$$

Pour avoir -3dB à $S=j\Omega=j$, il faut que :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha = \sqrt{\sqrt[N]{2} - 1} \quad (8)$$

Chercher analytiquement l'ordre N du filtre par rapport aux conditions A_{\min} et Ω_r (voir Figure 4) donne une équation transcendante pour N :

$$10 \cdot N \cdot \log\left(1 + \left[\sqrt[N]{2} - 1\right] \cdot \Omega_r^2\right) \geq A_{\min} \quad (9)$$

Il faut essayer plusieurs valeurs de N successives.

1.5.1.2 Exemple

On veut un filtre passe-bas, qui nous donne une fréquence de coupure f_{3dB} à 1 kHz, et qui ait un affaiblissement de 30 dB à 5 kHz. Par approximations successives, on trouve $N=4$.

On trouve $\alpha=0.435$. La Figure 5 nous montre la réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ d'un tel filtre.

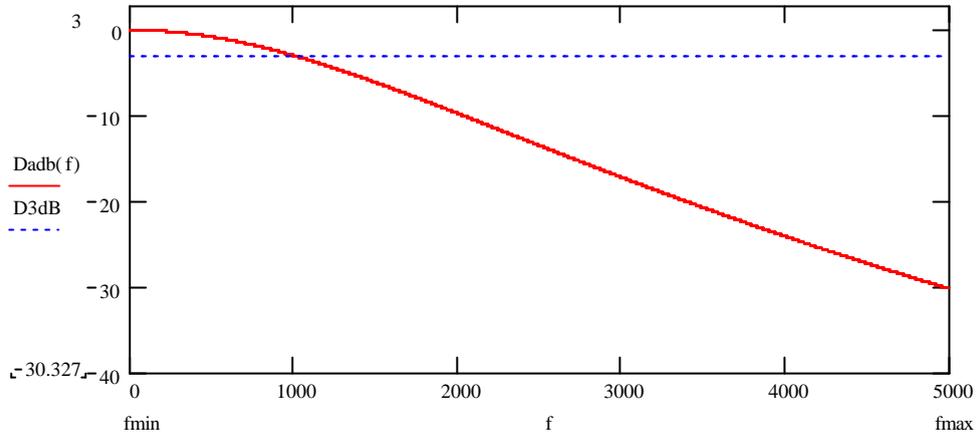


Figure 5

On voit que la fréquence de coupure f_{3dB} est bien située à 1 kHz comme désiré.

La Figure 6 nous montre la réponse en phase dans la bande passante.

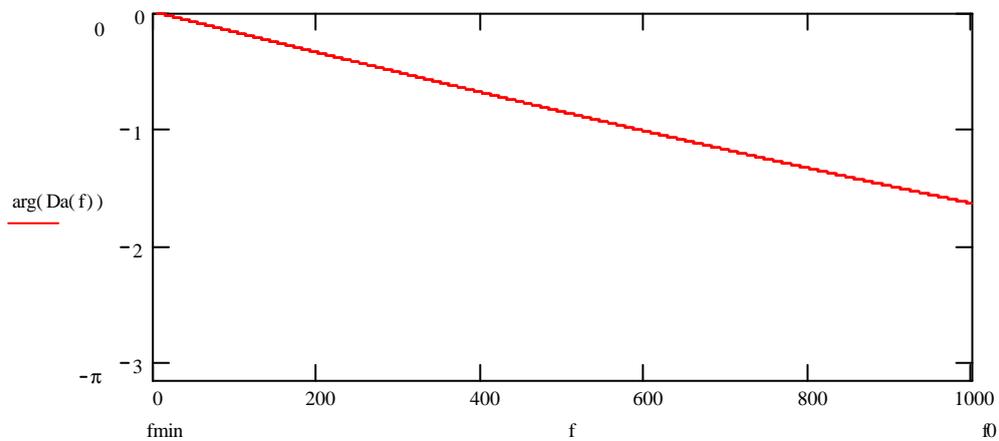


Figure 6

La Figure 7 nous montre la réponse indicielle.

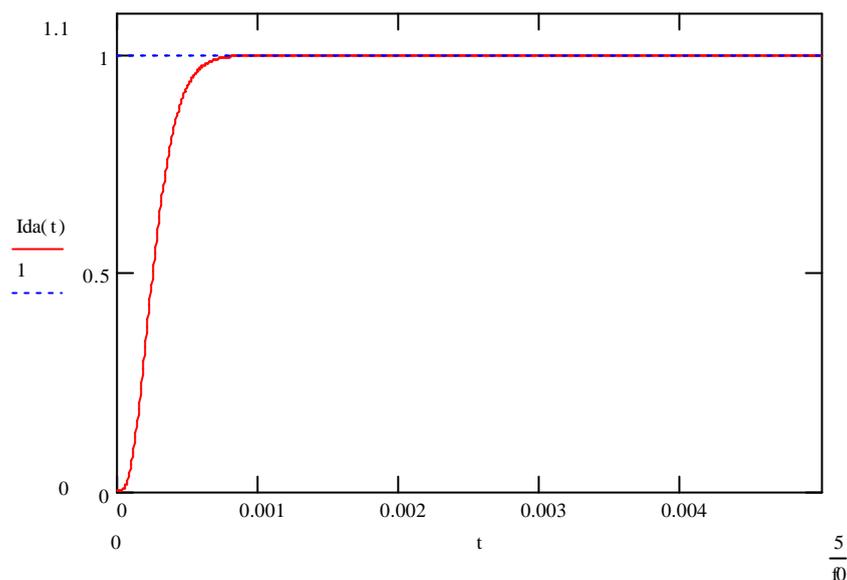


Figure 7

On peut voir que la réponse indicielle ne dépasse jamais l'asymptote $I_d(t)=1$. De même, la phase est très linéaire, générant peu de distorsion. Par contre l'affaiblissement après la fréquence de coupure est très médiocre.

Lorsque $\Omega \gg 1$, on obtient (en dB) :

$$H_{db}(\Omega) = -20 \cdot N \cdot \log(\alpha) - 20 \cdot N \cdot \log(\Omega)$$

On obtient donc $20 \cdot N = 80$ dB par décade d'affaiblissement.

1.5.2 Filtre de Bessel

Le filtre de Bessel a une courbe de phase quasiment linéaire. C'est son principal intérêt. Sa réponse en amplitude $|H(f)|$ est bien meilleure que celle du filtre à amortissement critique. Par contre, sa réponse indicielle oscille très légèrement avant de se stabiliser. C'est le principal 'défaut' par rapport à un filtre à amortissement critique. Mis à part cela, un filtre de Bessel est toujours à préférer à un filtre à amortissement critique.

Le filtre de Bessel est habituellement calibré sur sa fréquence $f_0 = -3$ dB. Il n'est pas facile de calculer un filtre de Bessel analytiquement. On se réfère donc aux tables.

1.5.2.1 Exemple

On veut un filtre passe-bas, qui nous donne une fréquence de coupure f_{3dB} à 1 kHz, et qui ait un affaiblissement de 40 dB à 5 kHz. On trouve dans les tables $N=4$ et la fonction $H(S)$ suivante :

$$H(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot S^2 + 1.3397 \cdot S + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot S^2 + 0.7743 \cdot S + 1} \quad (10)$$

Filtres actifs

On voit que les filtres de Bessel n'ont pas de zéros. En remplaçant S dans (10) selon (2), on trouve $\underline{H}(f)$:

$$H(f) = \frac{1}{0.4889 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right)^2 + 1.3397 \cdot j \cdot \frac{f}{f_0} + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right)^2 + 0.7743 \cdot j \cdot \frac{f}{f_0} + 1}$$

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ est donnée par la Figure 8.

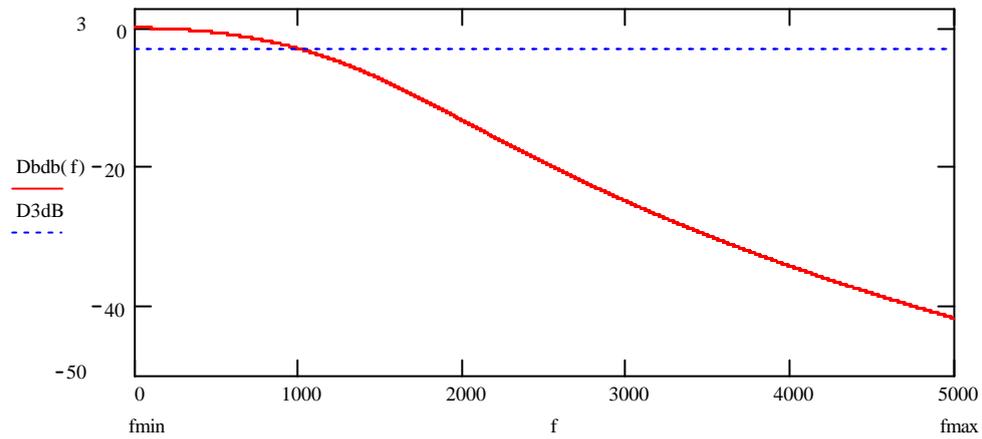


Figure 8

Par rapport à un filtre à amortissement critique, on a gagné 10 dB à 5 kHz (voir Figure 5).

La phase dans la bande passante est donnée par la Figure 9.

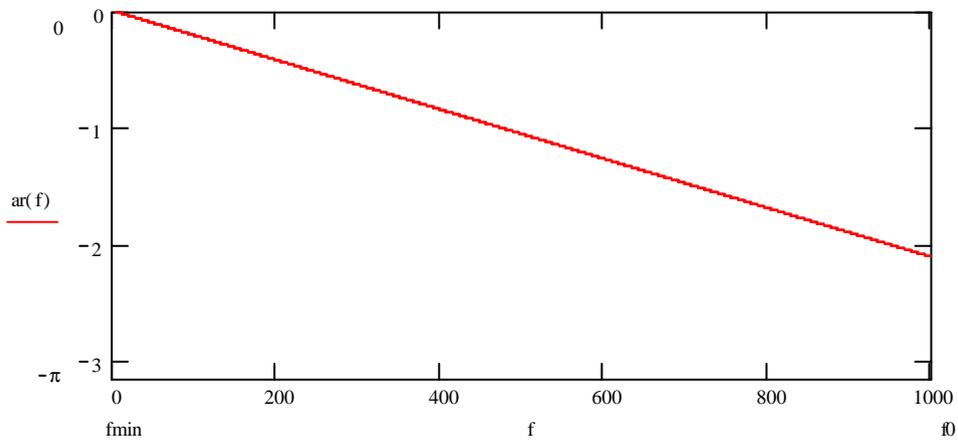


Figure 9

C'est véritablement quasi-linéaire !

La réponse indicielle est excellente également.

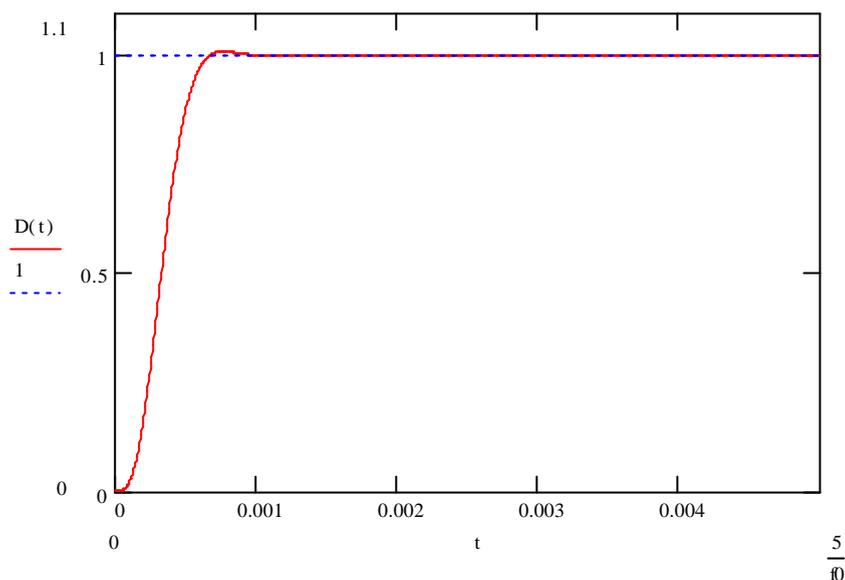


Figure 10

1.5.3 Fonction de transfert généralisée pour un passe-bas

Pour qu'une fonction de transfert définie dans le domaine fréquentiel $H(\Omega)$ donne une fonction réelle $h(t)$ dans le domaine temporel, il faut que $|H(\Omega)|$ soit symétrique par rapport à l'axe $j\omega$ (fonction paire). Pour cela, on peut définir une fonction de transfert générale correspondant à un filtre passe-bas de cette manière :

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot F(\Omega^2)}} \quad (11)$$

- $F(\Omega^2)$ Fonction de Ω^2
- ϵ Facteur compris entre 0 et 1

Idéalement :

- $F(\Omega^2) = 0$ lorsque $\Omega = 0$
- $0 \leq F(\Omega^2) \leq 1$ lorsque $0 \leq \Omega \leq 1$
- $F(\Omega^2) = \infty$ lorsque $\Omega \gg 1$

1.5.4 Filtre de Butterworth

Dans le cas du filtre de Butterworth, on définit la fonction $F(\Omega^2)$ ainsi :

$$F(\Omega^2) = \Omega^{2 \cdot N}$$

Donc :

$$|H(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \cdot \Omega^{2 \cdot N}}} \quad (12)$$

Filtres actifs

Le filtre de Butterworth est progressif : plus Ω est proche de zéro, plus l'atténuation est faible. Inversément, plus Ω est éloigné de zéro, plus l'atténuation est forte. Sur la bande passante, la valeur A_{\min} n'est atteinte que lorsque $\Omega = 1$. De plus, l'atténuation $|H(\Omega)|$ est très plate aux abords de $\Omega = 0$.

A présent, il faut trouver la fonction de transfert $H(\Omega)$ qui satisfasse (12). En remplaçant Ω dans (12) selon (2), et en mettant le tout au carré, on définit $H(S)^2$:

$$H(S)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-j \cdot S)^{2N}} \quad (13)$$

En cherchant les pôles de (13), on pourra décomposer notre fonction en cellules de premier et second ordres. On voit que les filtres Butterworth n'ont pas de zéros.

Le nombre de pôles de (13) est deux fois trop grand. On montre que $H(S)^2 = G(S) \cdot G(-S)$, c'est à dire la multiplication de deux fonctions. $G(S)$ n'a que des pôles à partie réelle négative, $G(-S)$ n'a que des pôles à partie réelle positive, donc $G(-S)$ doit être éliminé.

Chercher les pôles de (13) revient à résoudre l'équation :

$$1 + \varepsilon^2 (-j \cdot S)^{2N} = 0$$

En appliquant la formule de Moivre, on trouve l'ensemble des pôles :

$$P_k = \sqrt[2N]{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot e^{j \frac{2 \cdot k + N + 1}{2 \cdot N} \pi} \quad k = 0 \dots 2 \cdot N - 1 \quad (14)$$

Seuls les pôles qui ont une partie réelle négative sont conservés. Les autres sont rejetés. Donc k varie de $0 \dots N-1$.

Ces pôles sont situés sur une cercle (voir Figure 11).

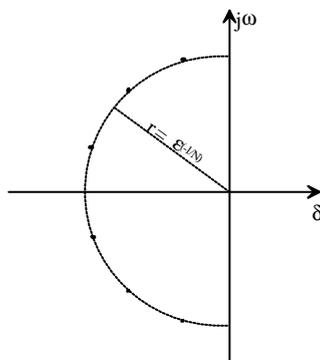


Figure 11

Lorsqu'on connaît les pôles de $H(s)$, il est assez simple de reconstituer $H(s)$, sachant que $H(0)=1$:

$$H(S) = \frac{-P_0}{S - P_0} \cdot \frac{-P_1}{S - P_1} \cdot \dots \cdot \frac{-P_{N-1}}{S - P_{N-1}}$$

En généralisant :

$$H(S) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-P_k}{S - P_k} \quad (15)$$

Et en remplaçant S comme indiqué par (2), on trouve $\underline{H}(f)$:

$$\underline{H}(f) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-P_k}{j \cdot \frac{f}{f_0} - P_k} \quad (16)$$

1.5.4.1 Dimensionnement du filtre de Butterworth

Selon (12), on peut trouver le facteur ϵ et l'ordre N du filtre, par rapport aux conditions A_{\max} , A_{\min} et Ω_r (voir également la Figure 4).

L'affaiblissement maximal A_{\max} dans la bande passante est atteint lorsque $\Omega=1$.

$$10 \cdot \log(1 + \epsilon^2) = A_{\max}$$

Donc :

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

L'affaiblissement minimal A_{\min} dans la bande bloquante est atteint lorsque $\Omega=\Omega_r$.

$$10 \cdot \log(1 + \epsilon^2 \cdot \Omega_r^{2 \cdot N}) = A_{\min}$$

Donc :

$$N = \text{entier} \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1\right) - 2 \cdot \log(\epsilon)}{2 \cdot \log(\Omega_r)}$$

Quant à la fréquence de coupure $\Omega_{3\text{dB}}$, on la trouve ainsi :

$$1 + \epsilon^2 \cdot \Omega_r^{2 \cdot N} = 2$$

Donc :

$$\Omega_{3\text{dB}} = \sqrt[N]{\frac{1}{\epsilon}}$$

1.5.4.2 Exemple

On veut un filtre passe-bas, qui nous donne une atténuation de 1 dB à 1 kHz et qui ait un affaiblissement de 50 dB à 5 kHz.

On pose $f_0=1$ kHz, donc :

$$\Omega_r = \frac{5 \cdot \text{KHz}}{1 \cdot \text{KHz}} = 5$$

Le facteur ϵ est fonction de A_{\max} seulement :

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.509$$

Filtres actifs

L'ordre N du filtre est fonction de A_{\min} et Ω_r .

$$N \geq \frac{\log\left(10^{\frac{50}{10}} - 1\right) - 2 \cdot \log(0.509)}{2 \cdot \log(5)} = 3.99, \text{ donc } N=4$$

La fréquence de coupure f_{3dB} est fonction de ϵ et N :

$$f_{3dB} = \sqrt[4]{\frac{1}{0.509}} \cdot 1000 = 1.184 \text{ KHz}$$

A présent on cherche les pôles selon (14), en éliminant ceux qui ont une partie réelle positive :

$$\begin{aligned} P_0 &= -0.453 + 1.094i \\ P_1 &= -1.094 + 0.453i \\ P_2 &= -1.094 - 0.453i \\ P_3 &= -0.453 - 1.094i \end{aligned}$$

Bien entendu, ces pôles sont conjugués complexes : (P_0-P_3) et (P_1-P_2) . On peut maintenant créer deux cellules de second ordre en regroupant les conjugués complexes selon (15) :

$$H(S) = \left(\frac{-P_0}{S-P_0} \cdot \frac{-P_3}{S-P_3} \right) \cdot \left(\frac{-P_1}{S-P_1} \cdot \frac{-P_2}{S-P_2} \right) \quad (17)$$

$$H(S) = \frac{1.402}{S^2 + 0.906 \cdot S + 1.402} \cdot \frac{1.402}{S^2 + 2.188 \cdot S + 1.402} \quad (18)$$

Pour obtenir le résultat en fréquence, il faut remplacer S dans (18) selon (2) :

$$H(f) = \frac{1.402}{\left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right)^2 + 0.906 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right) + 1.402} \cdot \frac{1.402}{\left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right)^2 + 2.188 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0}\right) + 1.402}$$

Filtres actifs

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ est donnée par la Figure 12.

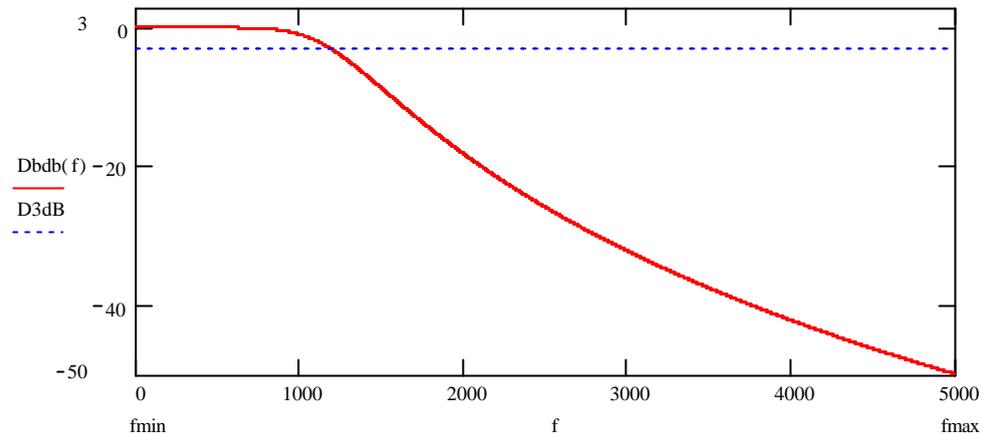


Figure 12

La coupure f_{3dB} se situe bien à 1.18 kHz et on a bien 50 dB d'affaiblissement à 5 kHz, comme calculé. Par la suite, on a un affaiblissement de $20 \cdot N = 80$ dB par décade.

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ dans la bande passante est donnée par la Figure 13 :

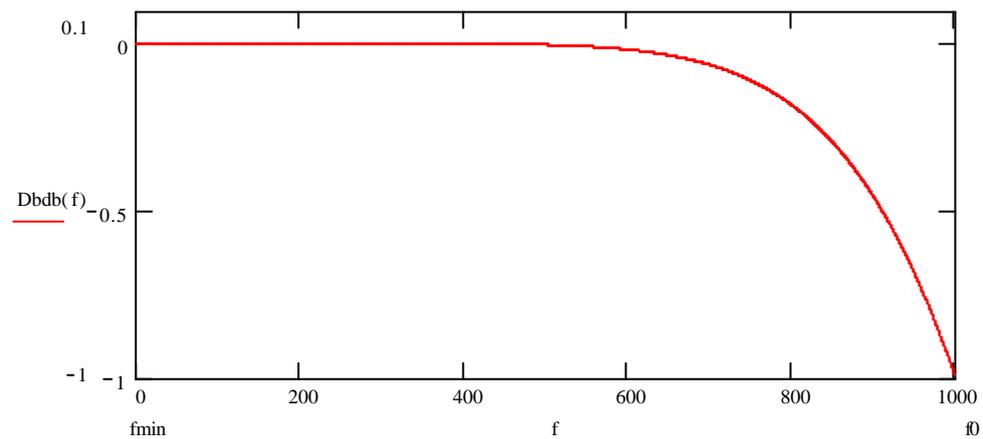


Figure 13

On a bien 1 dB d'affaiblissement à 1 kHz.

Filtres actifs

La phase dans la bande passante est donnée par la Figure 14.

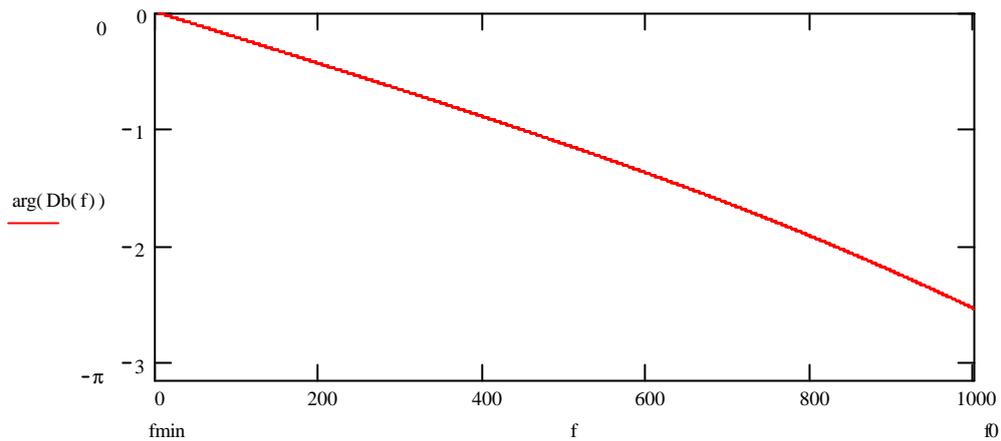


Figure 14

On a une légère distorsion de phase.

La réponse indicielle est donnée par la Figure 15.

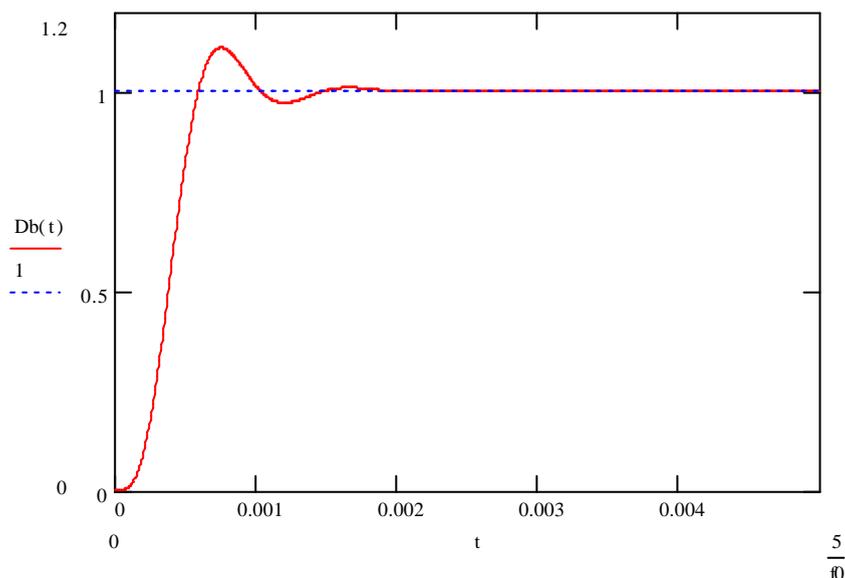


Figure 15

L'overshoot n'est pas négligeable (à peu près 15%).

1.5.5 Filtre de Tchebychev

Les filtres de Tchebychev sont optimisés pour que l'atténuation dans la bande passante oscille le plus grand nombre de fois possible entre zéro et A_{\max} . De cette manière, l'atténuation résiduelle dans la bande passante est répartie sur toute la largeur de cette bande. Par rapport aux filtres de Butterworth, l'atténuation après la bande passante est aussi beaucoup plus raide.

Filtres actifs

Les filtres de Tchebychev reprennent l'équation (11) de la manière suivante :

$$|\underline{H}(\Omega)| = K \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega)}} \quad (19)$$

- ε Facteur compris entre 0 et 1
- $T_n(\Omega)$ Polynôme de Tchebychev de degré n ($-1 \leq T_n(\Omega) \leq 1$ lorsque $\Omega \leq 1$)
- K Facteur d'adaptation pour que $|\underline{H}(0)| = 1$.

Les polynômes de Tchebychev peuvent être exprimés sous une forme trigonométrique lorsque $\Omega < 1$:

$$T_n(\Omega) = \cos(n \cdot \arccos(\Omega)) \quad (20)$$

Si bizarre que cela puisse paraître, l'équation (20) correspond à un polynôme de degré n. Les premiers polynômes de $T_n(\Omega)$ ont l'allure suivante :

$$\begin{aligned} T_1(\Omega) &= \Omega \\ T_2(\Omega) &= 2 \cdot \Omega^2 - 1 \\ T_3(\Omega) &= 4 \cdot \Omega^3 - 3 \cdot \Omega \\ T_4(\Omega) &= 8 \cdot \Omega^4 - 8 \cdot \Omega^2 + 1 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

La Figure 16 illustre les polynômes de Tchebychev pour $n = 1..8$.

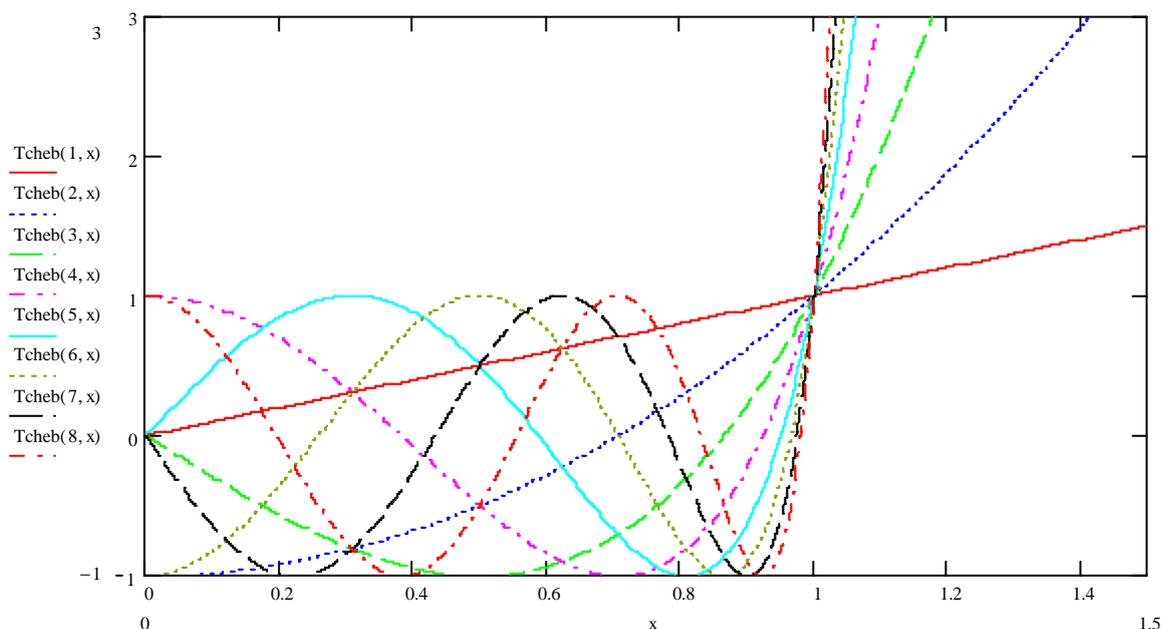


Figure 16

On voit que $T_n(0)^2 = 0$ pour n impair et $T_n(0)^2 = 1$ pour n pair. On en conclut pour le K de l'équation (19) :

- Lorsque n est pair, $K = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$ (donc $|\underline{H}(\Omega)| \geq 1$ dans la bande passante) (21)
- Lorsque n est impair, $K = 1$ (donc $|\underline{H}(\Omega)| \leq 1$ dans la bande passante)

Filtres actifs

Comme $T_n(\Omega)$ est paire ou impaire, $T_n(\Omega)^2$ dans (19) est toujours paire et comprise entre 0 et 1. Les filtres de Tchebychev n'ont pas de zéros.

Pour chercher les pôles d'un filtre de Tchebychev, il faut transformer (19) avec (2) et (20) :

$$H(S)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(-j \cdot S)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot \cos^2(N \cdot \arccos(-j \cdot S))} \quad (22)$$

Donc :

$$P_k = j \cdot \cos\left(\frac{1}{N} \cdot \arccos\left(\pm \frac{j}{\varepsilon}\right)\right) \quad (23)$$

On montre que les pôles $P_k = \delta s_k + \omega s_k$ de (23) sont situés sur une **ellipse** et définis de la manière suivante :

$$\delta s_k = \sinh\left(\frac{1}{N} \cdot \operatorname{arcsinh} h\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k + N + 1}{2 \cdot N} \cdot \pi\right) \quad (24)$$

$$\omega s_k = \cosh\left(\frac{1}{N} \cdot \operatorname{arcsinh} h\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot k + N + 1}{2 \cdot N} \cdot \pi\right) \quad (25)$$

pour $k = 0.. 2 \cdot N - 1$. Mais on ne garde que les pôles dont la partie réelle est négative.

1.5.5.1 Dimensionnement du filtre de Tchebychev

Cherchons les paramètres du filtre par rapport aux conditions A_{\max} , A_{\min} et Ω_r (voir également la Figure 4).

L'affaiblissement maximal A_{\max} dans la bande passante est atteint lorsque $T_n(\Omega)=1$.

$$10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2) = A_{\max}$$

Donc :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

L'affaiblissement minimal A_{\min} dans la bande bloquante est atteint lorsque $\Omega = \Omega_r$.

$$10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2 \cdot T_n^2(\Omega_r)) = A_{\min} \quad (26)$$

La résolution de cette équation transcendante se fait à l'aide d'approximations successives de N (très facile avec le logiciel Mathcad), ou à l'aide d'une abaque (voir annexes).

1.5.5.2 Exemple

On veut un filtre passe-bas, qui nous donne une atténuation de 1 dB dans la bande passante ($B = 1$ kHz) et qui ait un affaiblissement de 60 dB à 5 kHz.

On pose $f_0 = 1$ kHz, donc :

$$\Omega_r = \frac{5 \cdot \text{KHz}}{1 \cdot \text{KHz}} = 5$$

Filtres actifs

Le facteur ϵ est fonction de A_{\max} seulement :

$$\epsilon = \sqrt{10^{\frac{1}{10}} - 1} = 0.509$$

Par approximations successives de (26), on trouve $N=4$.

A présent on cherche les pôles selon (24) et (25), en éliminant ceux qui ont une partie réelle positive :

$$P_0 = -0.14 + 0.983i$$

$$P_1 = -0.337 + 0.407i$$

$$P_2 = -0.337 - 0.407i$$

$$P_3 = -0.14 - 0.983i$$

Bien entendu, ces pôles sont conjugués complexes : (P_1-P_4) et (P_2-P_3) . On peut maintenant créer deux cellules de second ordre en regroupant les conjugués complexes selon (15) :

$$H(S) = \left(\frac{-P_0}{S-P_0} \cdot \frac{-P_3}{S-P_3} \right) \cdot \left(\frac{-P_1}{S-P_1} \cdot \frac{-P_2}{S-P_2} \right) \quad (27)$$

$$H(S) = \frac{0.987}{S^2 + 0.279 \cdot S + 0.987} \cdot \frac{0.279}{S^2 + 0.674 \cdot S + 0.279} \quad (28)$$

Pour obtenir le résultat en fréquence, il faut remplacer S dans (18) selon (2) :

$$H(f) = \frac{0.987}{\left(j \cdot \frac{f}{f_0} \right)^2 + 0.279 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0} \right) + 0.987} \cdot \frac{0.279}{\left(j \cdot \frac{f}{f_0} \right)^2 + 0.674 \cdot \left(j \cdot \frac{f}{f_0} \right) + 0.279}$$

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ est donnée par la Figure 17.

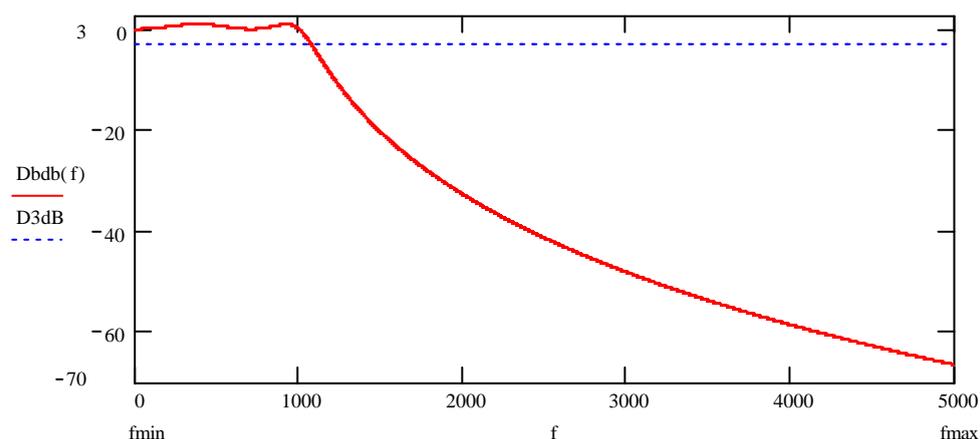


Figure 17

La fréquence de coupure f_{3dB} se situe grosso modo à 1075 Hz. Par la suite, on a un affaiblissement de $20 \cdot N = 80$ dB par décade. On voit que par rapport au filtre de Butterworth (voir Figure 12), l'affaiblissement dans la bande de réjection est beaucoup plus fort !

Filtres actifs

Le gain $|H(f)|$ dans la bande passante est illustré par la Figure 18.

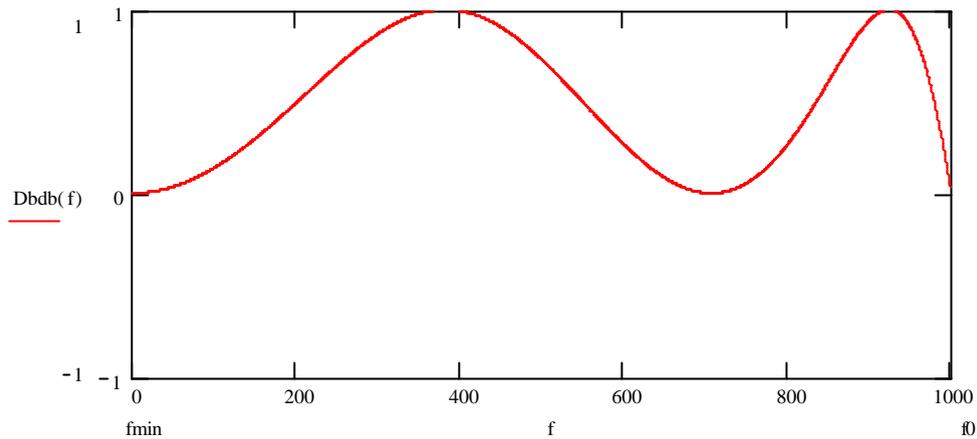


Figure 18

On a bien 1 dB d'affaiblissement à 1 kHz par rapport au gain maximal dans la bande passante.

Remarque : Si le gain dans la bande passante exprimé en dB est positif au lieu d'être négatif, c'est parce qu'on a choisi d'avoir $H(f=0) = 0\text{dB}$ et que l'ordre N est pair. On pourrait 'descendre' la courbe de A_{max} , c'est à dire ici enlever 1 dB, et le gain serait alors négatif dans la bande passante. Par contre, on aurait $H(f=0) = -1\text{ dB}$. A noter que lorsque n est impair, le gain en dB est négatif dans la bande passante, donc il n'y a pas de problème (voir les remarques (21) page 15).

La phase dans la bande passante est donnée par la Figure 19.

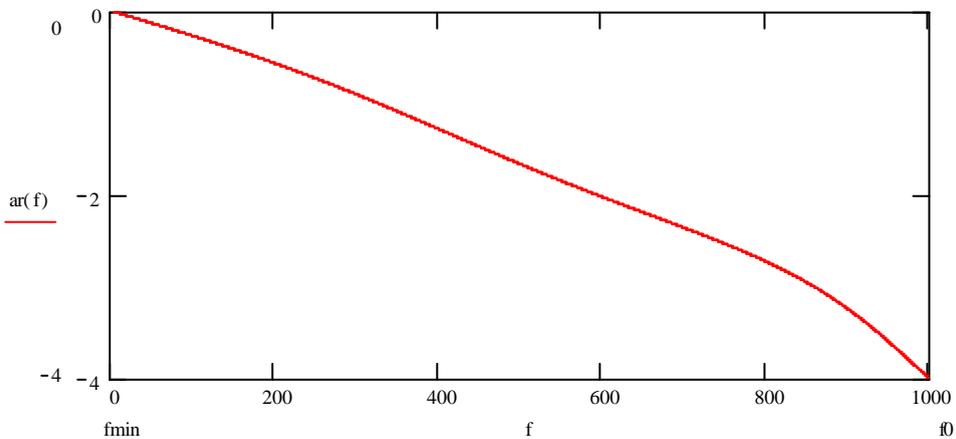


Figure 19

On a une assez forte distorsion de phase en fin de bande.

La réponse indicielle est donnée par la Figure 15.

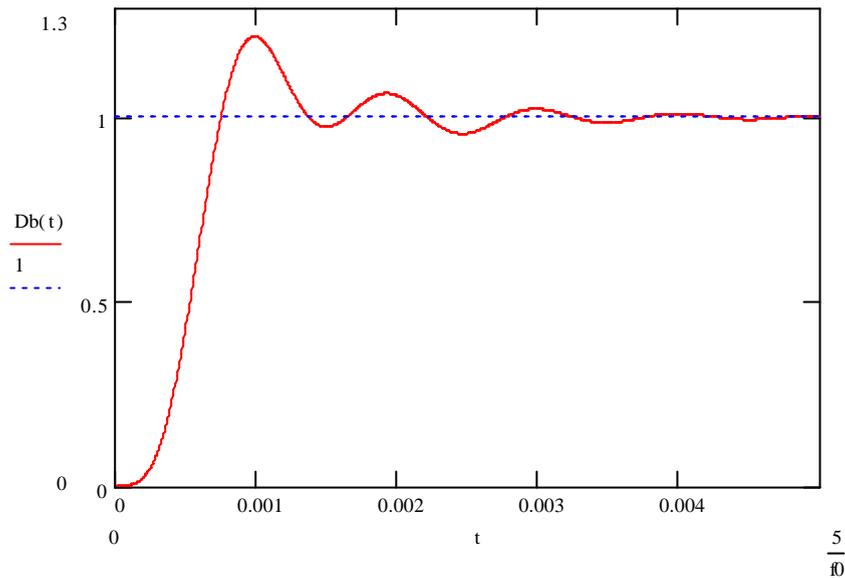


Figure 20

L'overshoot est ici assez fort (à peu près 25%) !

1.5.6 Filtres elliptiques

Les filtres elliptiques sont basés sur les filtres de Tchebychev. La grande différence est qu'on va ici ajouter des zéros à (19) dans la bande bloquante. L'affaiblissement immédiatement après la bande passante est meilleur que pour un filtre de Tchebychev, mais pas lorsque $\Omega \gg 1$. Les elliptiques sont précieux lorsque Ω_r est petit, c'est à dire lorsque l'affaiblissement après la bande passante doit être très raide.

Les filtres elliptiques ne peuvent être calibrés facilement de manière analytique. On est obligé d'appliquer des tables. Ces tables regroupent les trois paramètres A_{\max} , A_{\min} et Ω_r , ce qui les rend assez vite volumineuses...

1.5.6.1 Exemple

On veut un filtre passe-bas, qui nous donne une atténuation de 1 dB dans la bande passante de 1 kHz et qui ait un affaiblissement de 40 dB à 1.6 kHz.

On trouve par rapport aux tables :

$$H(S) = \frac{0.0804 \cdot S^2 + 1}{2.764 \cdot S^2 + 2.0139 \cdot S + 1} \cdot \frac{0.386 \cdot S^2 + 1}{1.001 \cdot S^2 + 0.2108 \cdot S + 1} \quad (29)$$

Ensuite on obtient $\underline{H}(f)$ en insérant $S = j \cdot \frac{f}{f_0}$ dans (29).

Filtres actifs

Le résultat est donné par la Figure 21 :

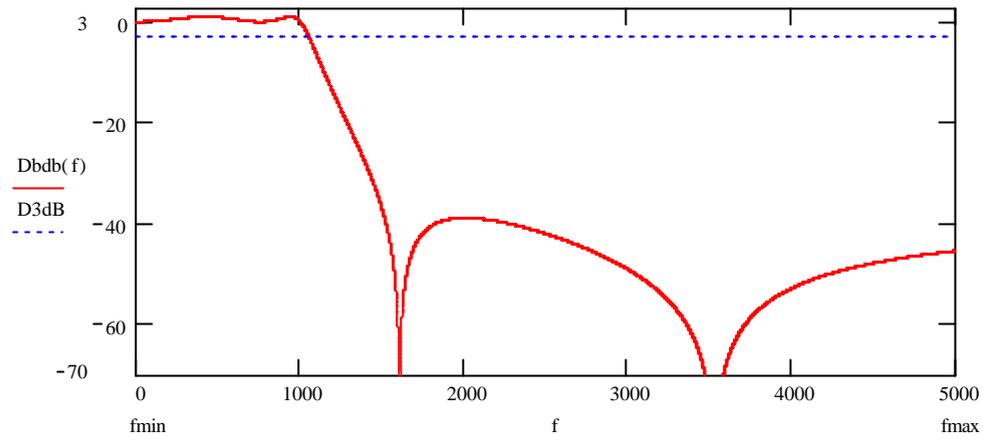


Figure 21

On voit bien l'idée d'insérer des zéros. L'affaiblissement dans la bande passante est donné par la Figure 23. Lorsque $\Omega \gg 1$, l'affaiblissement maximal est grosso modo 40 dB !

La Figure 22 nous montre l'emplacement des pôles et des zéros, ainsi que le regroupement des dipôles. A noter que les pôles et zéros conjugués complexes ne sont pas visibles sur le dessin.

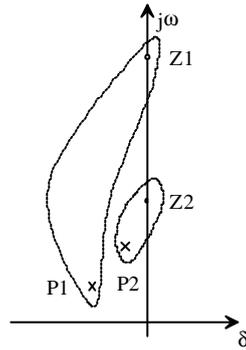


Figure 22

Filtres actifs

La Figure 23 montre l'affaiblissement dans la bande passante.

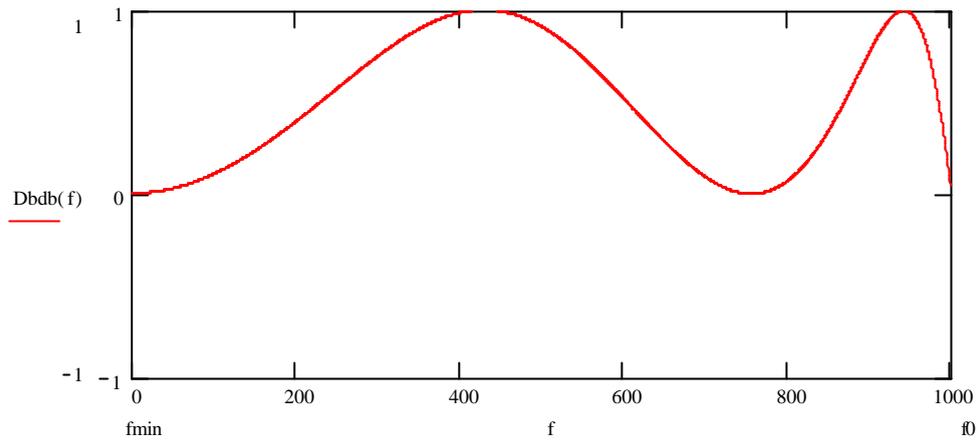


Figure 23

La réponse en amplitude dans la bande passante est comparable à celle d'un filtre de Tchebychev.

La phase dans la bande passante est donnée par la Figure 24.

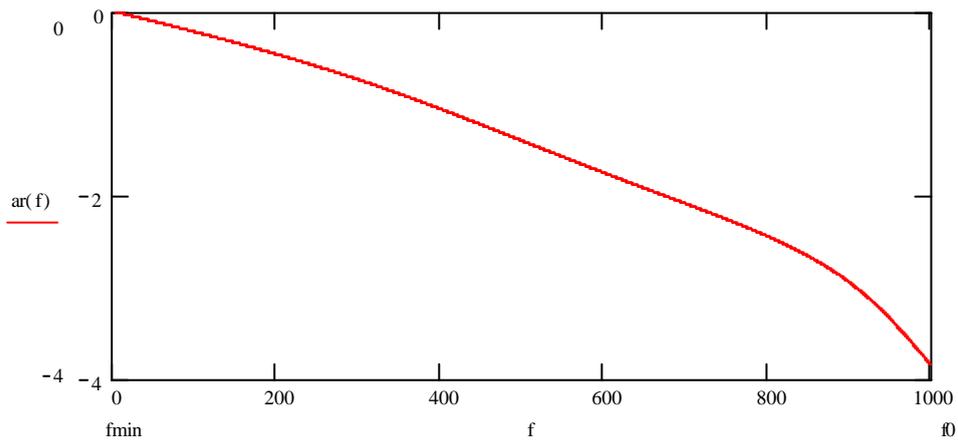


Figure 24

Ici également, la réponse en phase dans la bande passante est comparable à celle d'un filtre de Tchebychev.

La réponse indicielle est donnée par la Figure 25.

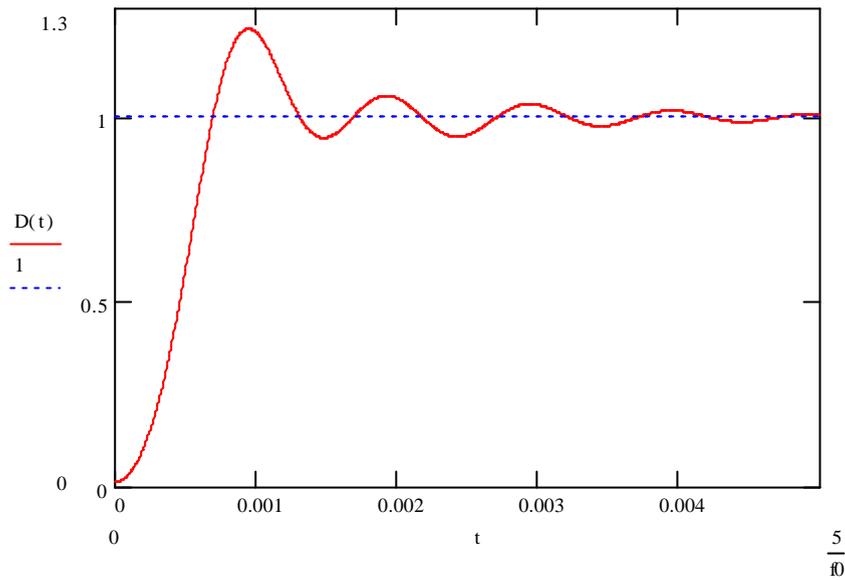


Figure 25

Ici encore, la réponse indicielle est comparable à celle d'un filtre Tchebychev.

1.6 Comparaison

... n'est pas raison. Mais on va quand même comparer les filtres que nous avons conçus.

Les gains $|H(\Omega)|$ sont données par la Figure 26.

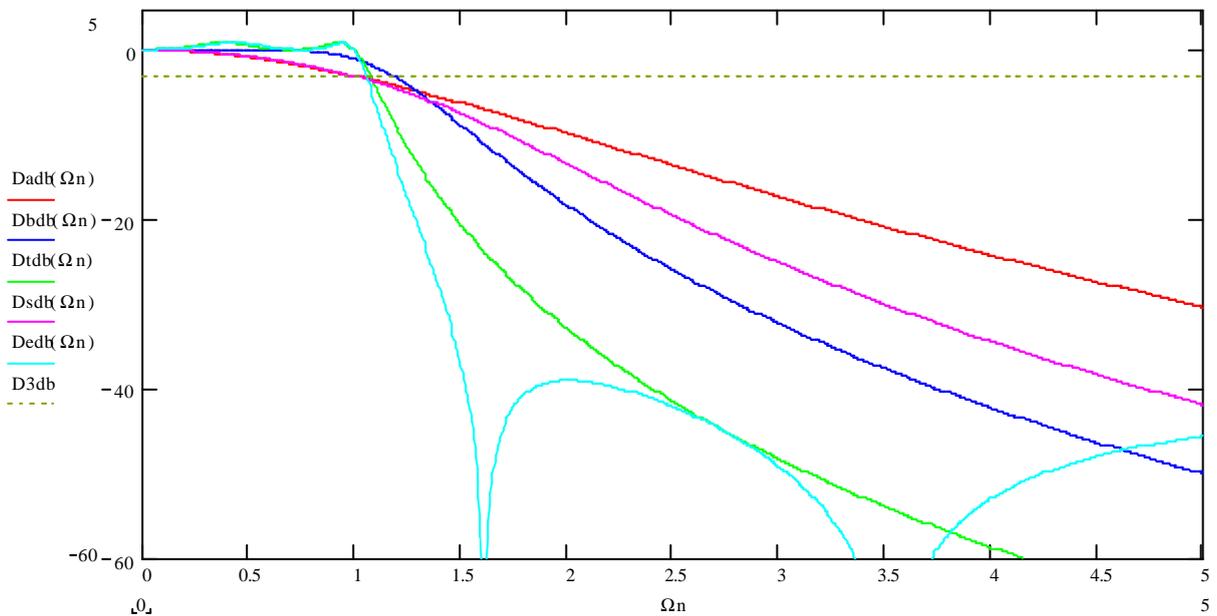


Figure 26

En partant dans l'ordre depuis le haut à $\Omega_n = 2$, on a : amortissement critique, Bessel, Butterworth, Tchebychev et elliptique.

Filtres actifs

Les gains $|H(\Omega)|$ dans la bande passante sont donnés par la Figure 27.

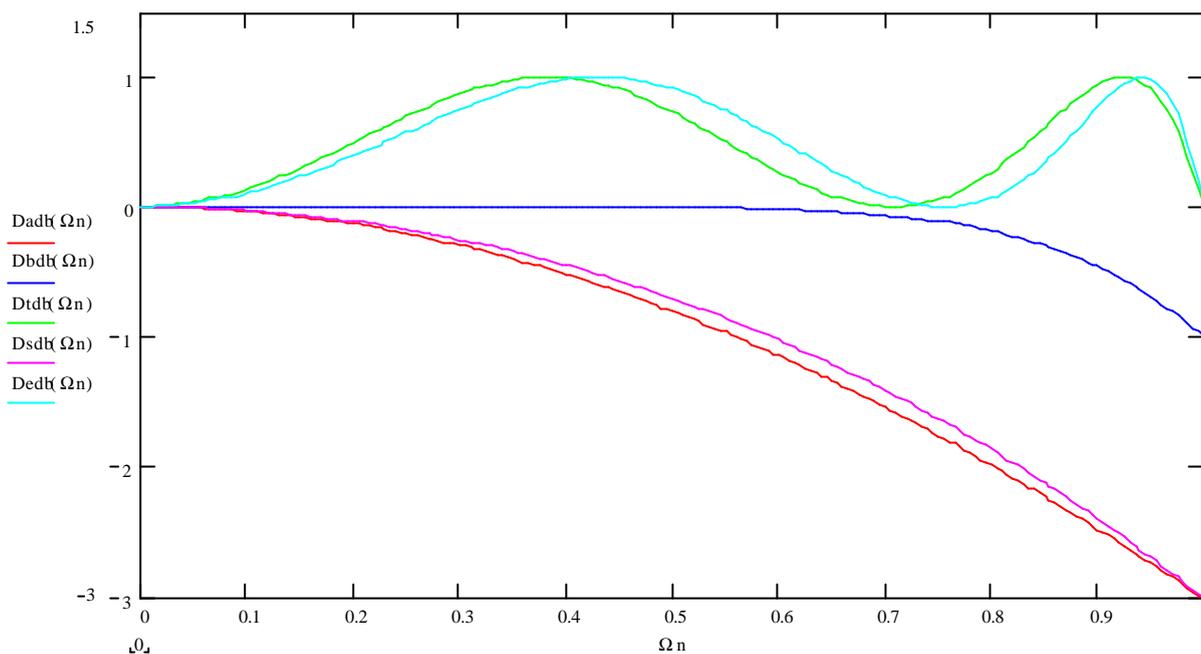


Figure 27

En partant dans l'ordre depuis le haut à $\Omega_n = 0.6$, on a : elliptique, Tchebychev, Butterworth, Bessel et amortissement critique.

Les courbes de phase dans la bande passante sont données par la Figure 28.

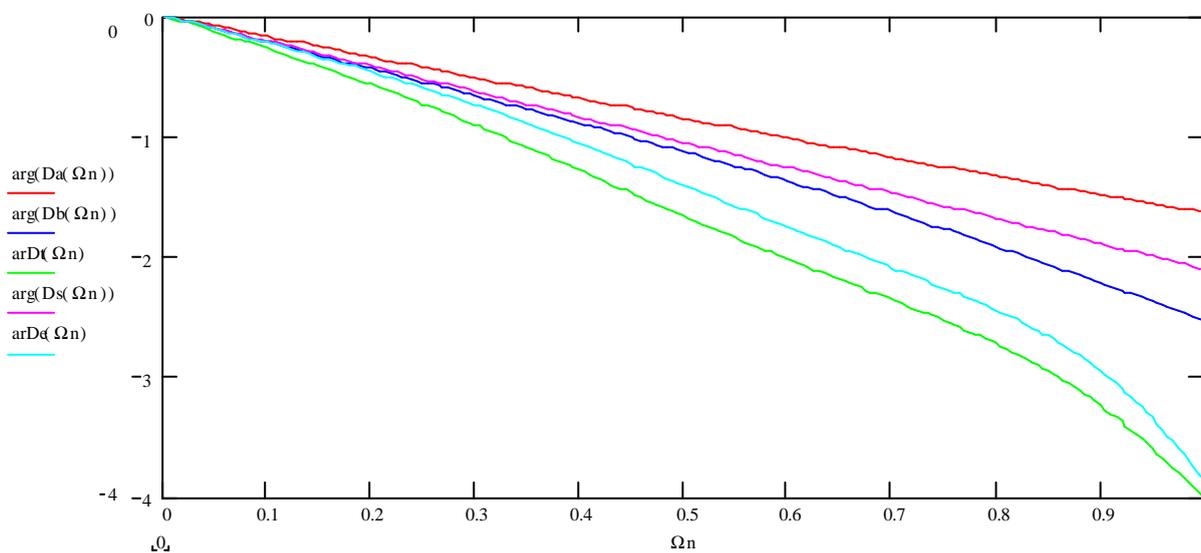


Figure 28

En partant depuis le haut à $\Omega_n=0.8$, on a dans l'ordre : amortissement critique, Bessel, Butterworth, elliptique et Tchebychev.

Filtres actifs

Des courbes de phase, on peut calculer les retards de groupe $\tau_g(\omega) = \frac{d}{d\omega} \varphi(\omega)$:

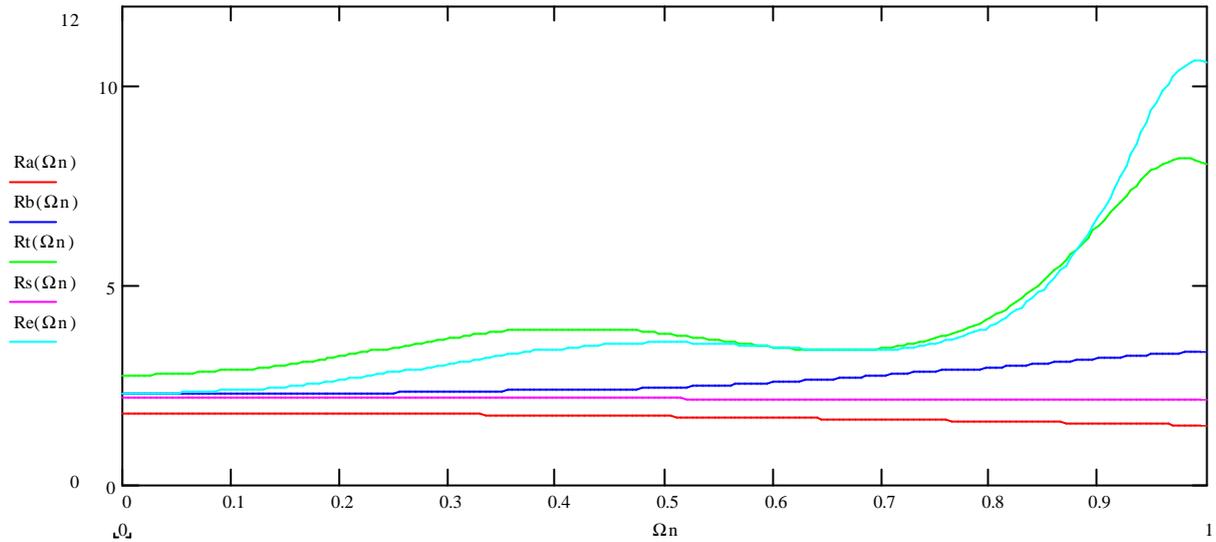


Figure 29

En partant dans l'ordre depuis le haut à $\Omega_n = 1$, on a : elliptique, Tchebychev, Butterworth, Bessel et amortissement critique. On voit que pour Bessel le retard est constant.

Les réponses indicielles sont données par la Figure 30.

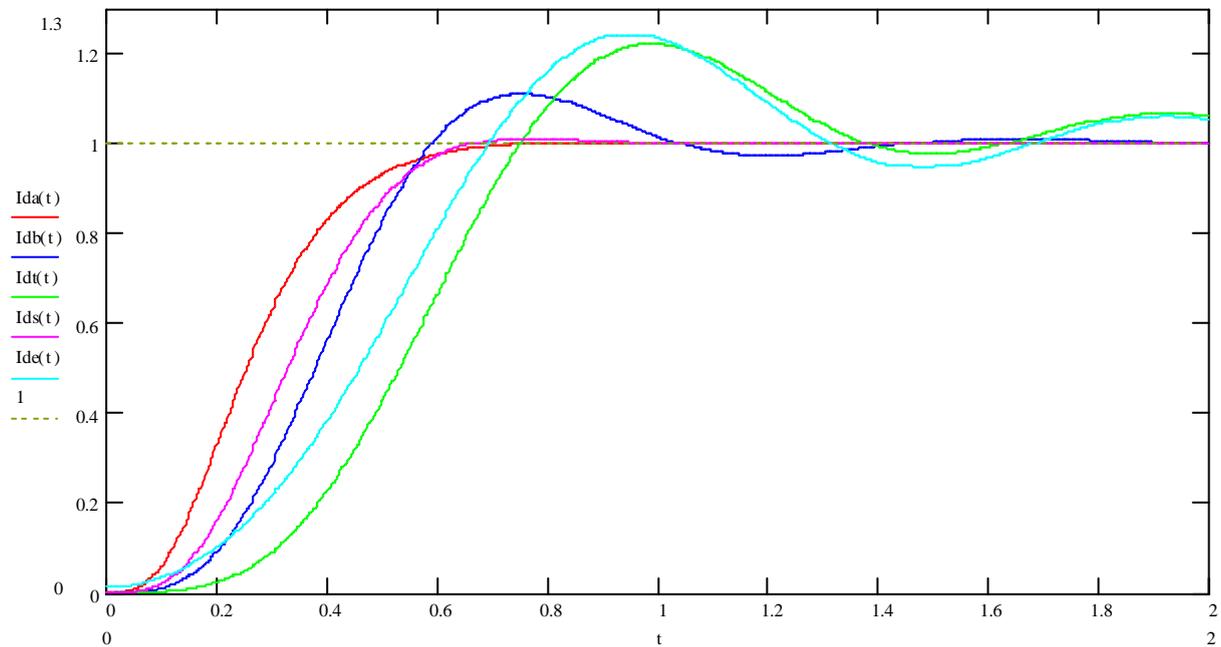


Figure 30

En partant dans l'ordre depuis la gauche à $I_d(t)=0.6$, on a : amortissement critique, Bessel, Butterworth, elliptique et Tchebychev.

2 Transformations à partir du gabarit passe-bas

Les passe-haut, passe-bande et coupe-bande se laissent aisément déterminer à partir d'un gabarit tel que celui de la Figure 4.

2.1 Transposition passe-bas - passe-haut

Pour transformer un filtre passe-bas en un filtre passe-haut (et réciproquement !) on fait subir à la variable complexe normalisée $S=j\cdot\Omega$ la transformation suivante :

$$S \leftrightarrow \frac{1}{S} \quad (30)$$

Cette transformation s'applique à la fois aux gabarits et aux fonctions de transfert.

2.1.1 Transformation du gabarit

Le gabarit d'un filtre passe-haut se transforme en gabarit de filtre passe-bas de la manière indiquée par la Figure 31.

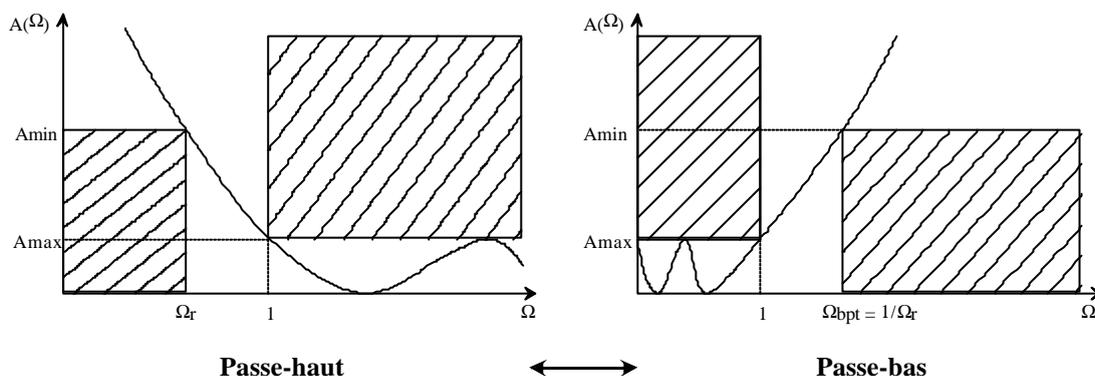


Figure 31

2.1.2 Transformation de la fonction de transfert

La transformation de la fonction de transfert est suivant (30) :

$$H_{PH}(S) = H_{PB}\left(\frac{1}{S}\right) \quad (31)$$

L'ordre du filtre passe-bas est préservé pour le filtre passe-haut.

2.1.3 Exemple avec filtre de Butterworth

On veut un filtre passe-haut de type Butterworth, qui ait un affaiblissement minimal de 50 dB de 0 à 2 kHz, et un affaiblissement maximal de 1 dB à partir de 10 kHz. On pose :

$$\begin{aligned} f_0 &= 10 \text{ KHz} \\ \Omega_r &= \frac{2 \text{ KHz}}{f_0} = 0.2 \\ \frac{1}{\Omega_r} &= 5 \end{aligned} \quad (32)$$

Filtres actifs

Le gabarit passe-haut est donné par la Figure 32.

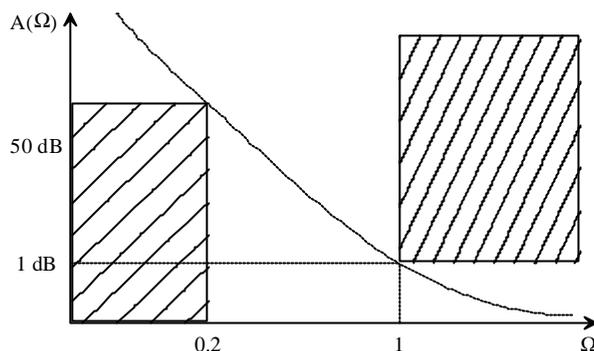


Figure 32

Le gabarit passe-bas équivalent est donné par la Figure 33.

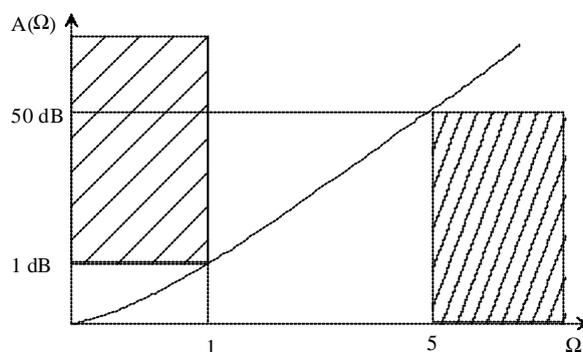


Figure 33

Le filtre désiré correspond à (18).

$$H_{PB}(S) = \frac{1.402}{S^2 + 0.906 \cdot S + 1.402} \cdot \frac{1.402}{S^2 + 2.188 \cdot S + 1.402} \quad (33)$$

On remplace S par 1/S :

$$H_{PH}(S) = \frac{1.402}{S^{-2} + 0.906 \cdot S^{-1} + 1.402} \cdot \frac{1.402}{S^{-2} + 2.188 \cdot S^{-1} + 1.402} \quad (34)$$

$$H_{PH}(S) = \frac{1.402 \cdot S^2}{1 + 0.906 \cdot S + 1.402 \cdot S^2} \cdot \frac{1.402 \cdot S^2}{1 + 2.188 \cdot S + 1.402 \cdot S^2} \quad (35)$$

On voit que des zéros sont apparus ! On remplace S par $j \cdot \frac{f}{f_0}$:

$$H_{PH}(f) = \frac{-1.402 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 - 1.402 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \cdot 0.906 \cdot \frac{f}{f_0}} \cdot \frac{-1.402 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}{1 - 1.402 \cdot \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \cdot 2.188 \cdot \frac{f}{f_0}} \quad (36)$$

Filtres actifs

Le résultat est visible sur la Figure 34. L'affaiblissement à 3dB est visible également.

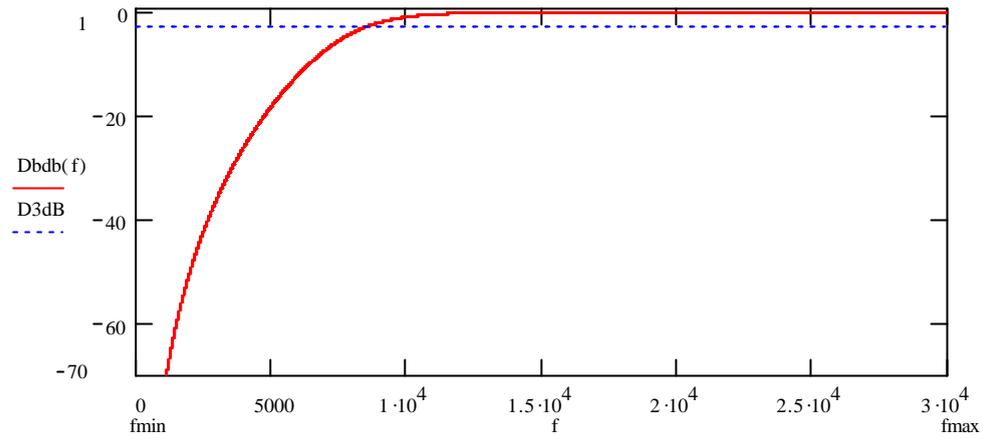


Figure 34

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ après 10 kHz est donné par la Figure 35.

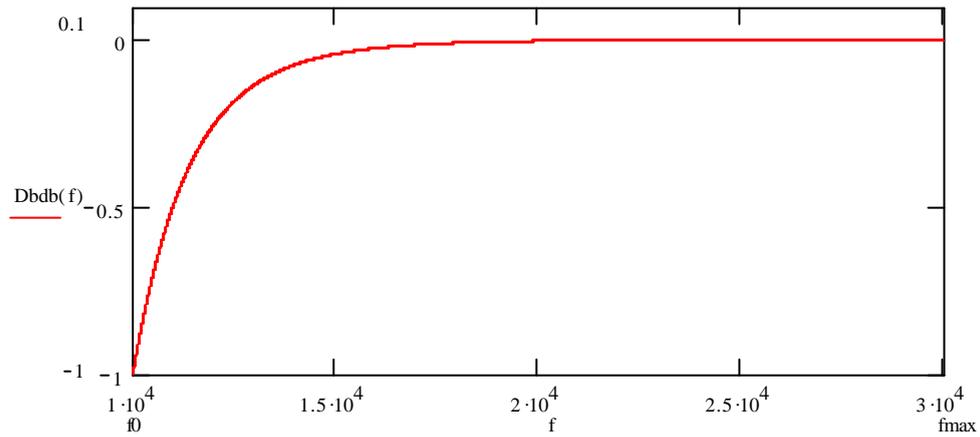


Figure 35

La phase après 10 kHz est donnée par la Figure 36.

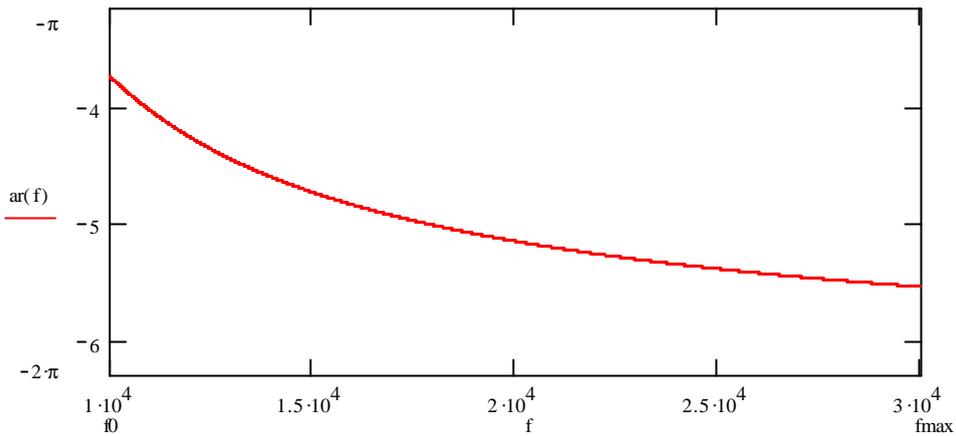


Figure 36

La phase est loin d'être linéaire. Mais elle semble acceptable après 20 kHz.

2.1.4 Exemple avec filtre elliptique

La transformation fonctionne également avec un filtre elliptique, comme le montre l'exemple suivant.

On veut un filtre passe-haut de type elliptique, qui ait un affaiblissement minimal de 40 dB de 0 à 1 kHz, et un affaiblissement maximal de 1 dB à partir de 1.8 kHz.

On pose :

$$\begin{aligned}
 f_0 &= 1.8 \text{ KHz} \\
 \Omega_r &= \frac{1 \text{ KHz}}{f_0} = 0.556 \\
 \frac{1}{\Omega_r} &= 1.8
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Le gabarit passe-haut est donné par la Figure 37.

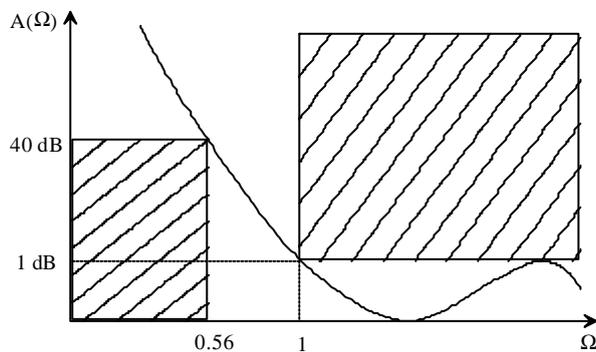


Figure 37

Filtres actifs

Le gabarit passe-bas équivalent est donné par la Figure 38.

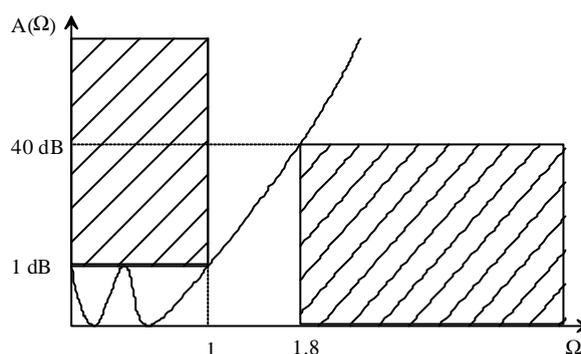


Figure 38

Le filtre elliptique répondant à cette spécification est le même que (29). La transformation passe-bas \rightarrow passe-haut se passe ainsi :

$$H_{PB}(S) = \frac{0.0804 \cdot S^2 + 1}{2.764 \cdot S^2 + 2.0139 \cdot S + 1} \cdot \frac{0.386 \cdot S^2 + 1}{1.001 \cdot S^2 + 0.2108 \cdot S + 1} \quad (38)$$

On remplace S par 1/S :

$$H_{PH}(S) = \frac{0.0804 \cdot S^{-2} + 1}{2.764 \cdot S^{-2} + 2.0139 \cdot S^{-1} + 1} \cdot \frac{0.386 \cdot S^{-2} + 1}{1.001 \cdot S^{-2} + 0.2108 \cdot S^{-1} + 1} \quad (39)$$

$$H_{PH}(S) = \frac{0.0804 + S^2}{2.764 + 2.0139 \cdot S + S^2} \cdot \frac{0.386 + S^2}{1.001 + 0.2108 \cdot S + S^2} \quad (40)$$

On avait des zéros au départ, on en retrouve à l'arrivée. On remplace S par $j \cdot \frac{f}{f_0}$:

$$H_{PH}(f) = \frac{0.0804 - \frac{f^2}{f_0^2}}{2.764 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \cdot 2.0139 \cdot \frac{f}{f_0}} \cdot \frac{0.386 - \frac{f^2}{f_0^2}}{1.001 - \frac{f^2}{f_0^2} + j \cdot 0.2108 \cdot \frac{f}{f_0}} \quad (41)$$

Filtres actifs

Le résultat est visible sur la Figure 39. L'affaiblissement à 3dB est visible également.

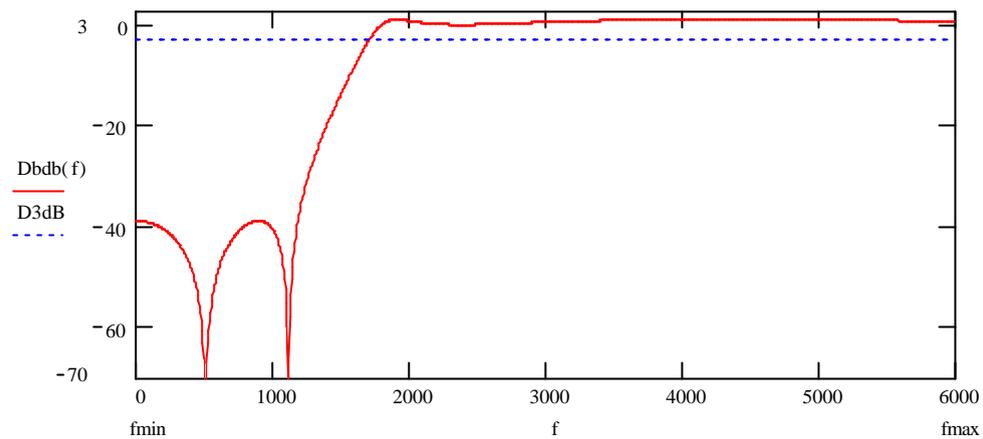


Figure 39

La réponse en amplitude $H_{dB}(f)$ après 1800Hz est donné par la Figure 40.

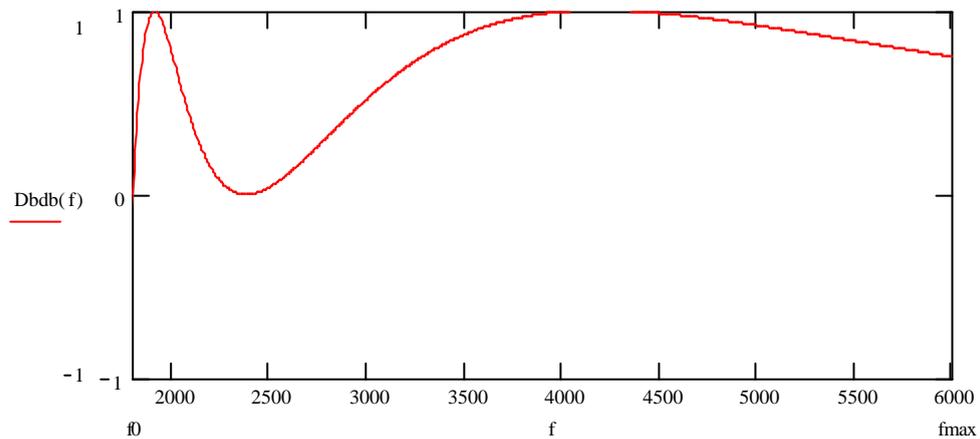


Figure 40

2.2 Transposition passe-bas - passe-bande

La transformation d'un filtre passe-bas en un filtre passe-bande est un petit peu plus complexe. On va tout d'abord transformer le gabarit.

2.2.1 Transformation du gabarit

Le gabarit d'un filtre passe-bande se transforme en gabarit de filtre passe-bas de la manière indiquée par la Figure 41.

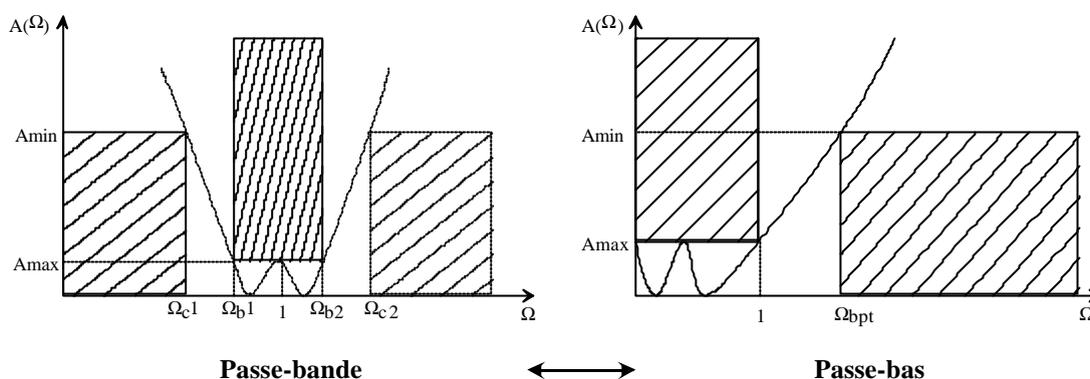


Figure 41

Les relations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned}
 B &= \Omega_{b2} - \Omega_{b1} \\
 \Omega_{pbt} &= \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{B} \\
 \Omega_{c1} \cdot \Omega_{c2} &= 1 \\
 \Omega_{b1} \cdot \Omega_{b2} &= 1
 \end{aligned} \tag{42}$$

De (42), on déduit :

$$\begin{aligned}
 \Omega_{b1} &= -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1} \\
 \Omega_{b2} &= \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1}
 \end{aligned} \tag{43}$$

2.2.2 Transformation de la fonction de transfert

La variable complexe normalisée $S=j \cdot \Omega$ subit la transformation suivante

$$S \leftrightarrow \frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \tag{44}$$

Donc la transformation de la fonction de transfert est la suivante :

$$H_{\text{PasseBande}}(S) = H_{\text{PasseBas}}\left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S}\right) \tag{45}$$

L'ordre du filtre passe-bande est doublé par rapport au filtre passe-bas. C'est un peu normal, dans la mesure où un passe-bande est une conjonction de deux filtres passe-bas et passe-haut !

2.2.3 Exemple avec filtre de Bessel

On veut un filtre passe-bande de type Bessel, qui ait une bande passante comprise entre 300 et 400 Hz. A ces fréquences, l'affaiblissement maximal est bien entendu de 3 dB. On veut un affaiblissement minimal de 35 dB dès 700 Hz.

On pose :

$$f_0 = \sqrt{300 \cdot 400} = 346.4 \text{ Hz} \quad (46)$$

Limites normalisées de la bande passante, et bande passante normalisée :

$$\begin{aligned} \Omega_{b1} &= \frac{300 \text{ Hz}}{f_0} = 0.87 \\ \Omega_{b2} &= \frac{400 \text{ Hz}}{f_0} = 1.16 \\ B &= \Omega_{b2} - \Omega_{b1} = 0.29 \end{aligned} \quad (47)$$

Limites normalisées de la bande de réjection :

$$\begin{aligned} \Omega_{c2} &= \frac{700 \text{ Hz}}{f_0} = 2.021 \\ \Omega_{c1} &= \frac{1}{\Omega_{c2}} = 0.495 \end{aligned} \quad (48)$$

Le gabarit passe-bande est donné par la Figure 42 :

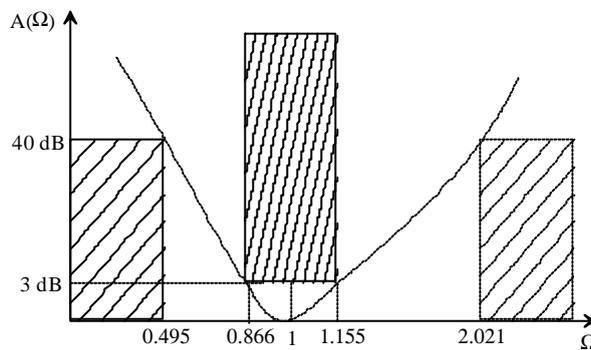


Figure 42

Fréquence de coupure du gabarit passe-bas :

$$\Omega_{pbt} = \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{B} = 5.286 \quad (49)$$

Filtres actifs

Le gabarit passe-bas équivalent est donné par la Figure 43.

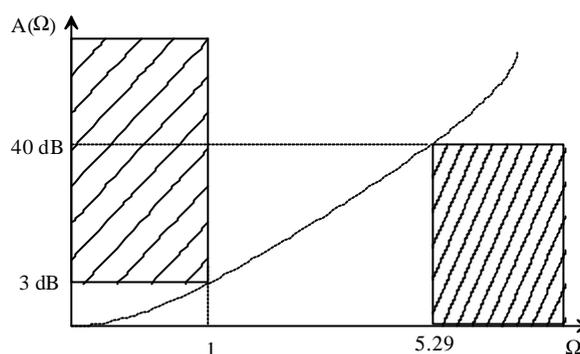


Figure 43

Le filtre de Bessel qui satisfait ce gabarit est donné par (10) :

$$H_{\text{PBas}}(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot S^2 + 1.3397 \cdot S + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot S^2 + 0.7743 \cdot S + 1} \quad (50)$$

On remplace S suivant la transformation (44) :

$$H_{\text{PBde}}(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot \left(\frac{S^2+1}{B \cdot S}\right)^2 + 1.3397 \cdot \frac{S^2+1}{B \cdot S} + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot \left(\frac{S^2+1}{B \cdot S}\right)^2 + 0.7743 \cdot \frac{S^2+1}{B \cdot S} + 1} \quad (51)$$

$$H_{\text{PBde}}(S) = \frac{B^2 \cdot S^2}{0.4889 \cdot (S^2+1)^2 + 1.3397 \cdot (B \cdot S^3 + B \cdot S) + B^2 \cdot S^2} \cdot \frac{B^2 \cdot S^2}{0.389 \cdot (S^2+1)^2 + 0.7743 \cdot (B \cdot S^3 + B \cdot S) + B^2 \cdot S^2} \quad (52)$$

On voit immédiatement que (52) réunit deux cellules d'ordre quatre. Par la suite, on verra que seules les cellules d'ordre un et deux peuvent se modéliser à l'aide d'un ampli.

Donc il faudrait scinder chacune de ces deux cellules d'ordre quatre en quatre cellules d'ordre deux ! Cette opération n'est pas évidente du tout : il faut chercher les quatre pôles de chaque cellule, regrouper les pôles conjugués complexes, etc, etc.

Heureusement, Mathcad et d'autres logiciels dédiés font cela très bien.

On remarquera que des zéros sont apparus après la transformation (voir (52)).

Filtres actifs

Si on remplace la variable $S=j\cdot f/f_0$ on trouve le gain $|\underline{H}(f)|$ illustré par la Figure 44.

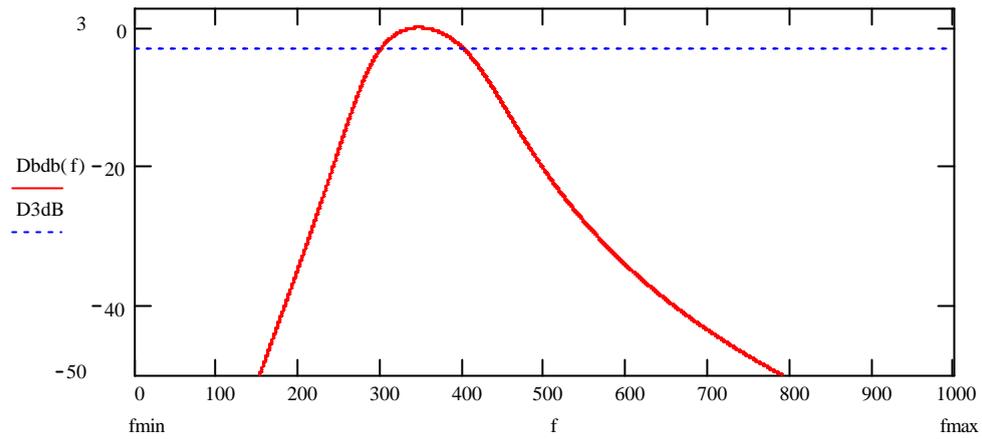


Figure 44

Le gain $|\underline{H}(f)|$ dans la bande passante est montré par la Figure 45.

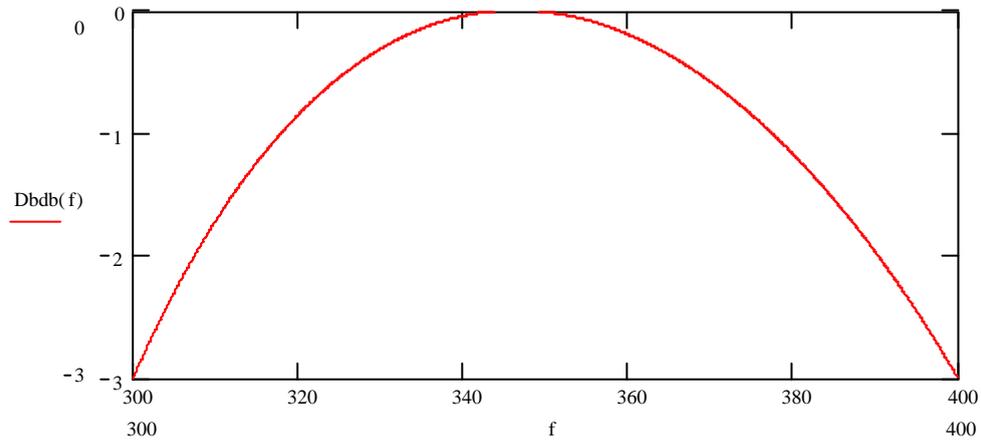


Figure 45

Le déphasage dans la bande passante est illustré par la Figure 46.

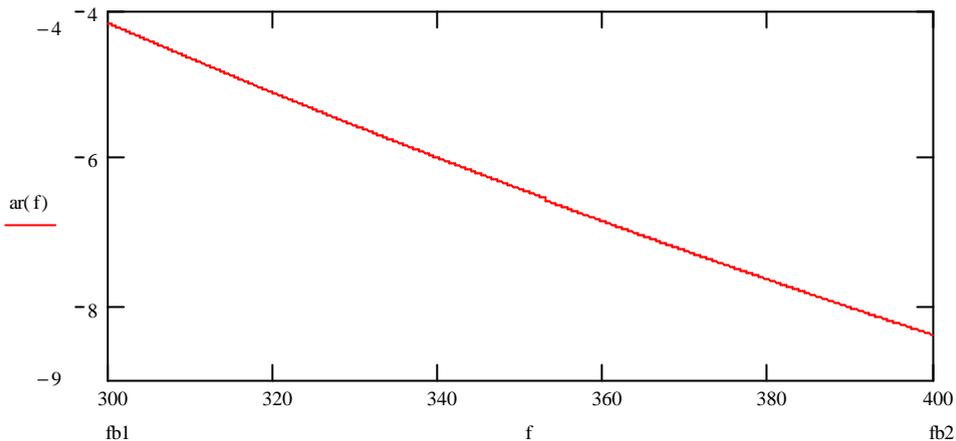


Figure 46

On voit que la transformation passe-bas \rightarrow passe-bande n'a en rien modifié les caractéristiques d'un filtre de Bessel.

2.2.4 Exemple avec filtre elliptique

La transformation fonctionne également avec un filtre elliptique, comme le montre l'exemple suivant.

On veut un passe-bande de type elliptique centré à 5 kHz avec une bande passante de 1 kHz. L'affaiblissement maximal dans la bande passante est 1 dB, et l'affaiblissement minimal à partir de 6 kHz doit être de 40 dB.

On pose :

$$\begin{aligned} f_0 &= 5 \text{ KHz} \\ B &= \frac{1 \text{ KHz}}{5 \text{ KHz}} = 0.2 \end{aligned} \quad (53)$$

Limites normalisées de la bande de réjection :

$$\begin{aligned} \Omega_{c2} &= \frac{6 \text{ KHz}}{f_0} = 1.2 \\ \Omega_{c1} &= \frac{1}{\Omega_{c2}} = 0.833 \end{aligned} \quad (54)$$

Limites normalisées de la bande passante :

$$\begin{aligned} \Omega_{b1} &= -\frac{0.2}{2} + \sqrt{\frac{0.2^2}{4} + 1} = 0.905 \\ \Omega_{b2} &= \frac{0.2}{2} + \sqrt{\frac{0.2^2}{4} + 1} = 1.015 \end{aligned} \quad (55)$$

Filtres actifs

Le gabarit passe-bande est donné par la Figure 47 :

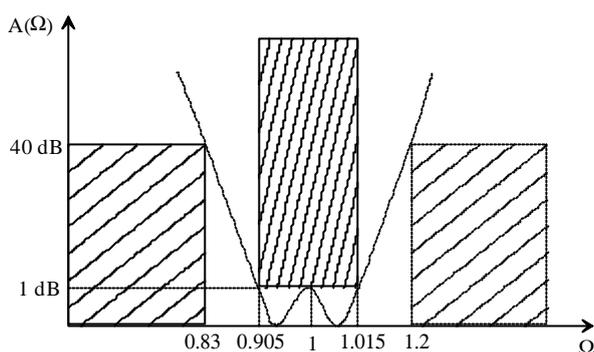


Figure 47

Fréquence de coupure du gabarit passe-bas :

$$\Omega_{pbt} = \frac{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}}{B} = 1.833 \quad (56)$$

Le gabarit passe-bas équivalent est donné par la Figure 48 :

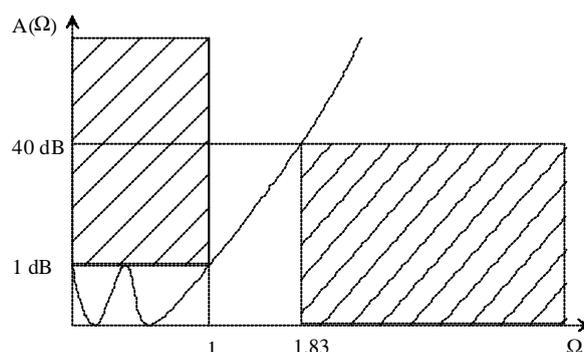


Figure 48

Le filtre elliptique répondant à cette spécification est le même que (29). La transformation passe-bas \rightarrow passe-bande se passe ainsi :

$$H_{PB}(S) = \frac{0.0804 \cdot S^2 + 1}{2.764 \cdot S^2 + 2.0139 \cdot S + 1} \cdot \frac{0.386 \cdot S^2 + 1}{1.001 \cdot S^2 + 0.2108 \cdot S + 1} \quad (57)$$

On remplace S suivant la transformation (44) :

$$H_{PBdc}(S) = \frac{0.0804 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right)^2 + 1}{2.764 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right)^2 + 2.0139 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right) + 1} \cdot \frac{0.386 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right)^2 + 1}{1.001 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right)^2 + 0.2108 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{B \cdot S} \right) + 1}$$

Filtres actifs

Si on remplace la variable $S=j\cdot f/f_0$, on trouve le gain $|\underline{H}(f)|$ illustré par la Figure 49. L'affaiblissement à 3dB est montré également.

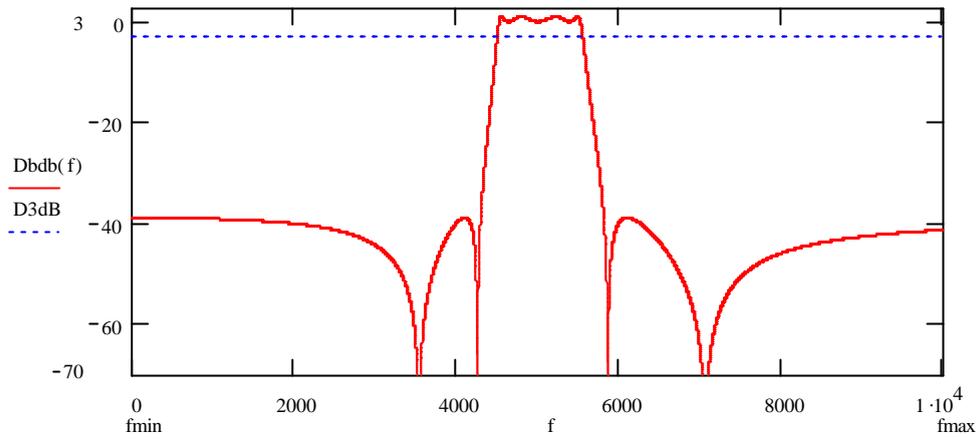


Figure 49

Le gain $|\underline{H}(f)|$ dans la bande passante est illustré par la Figure 50.

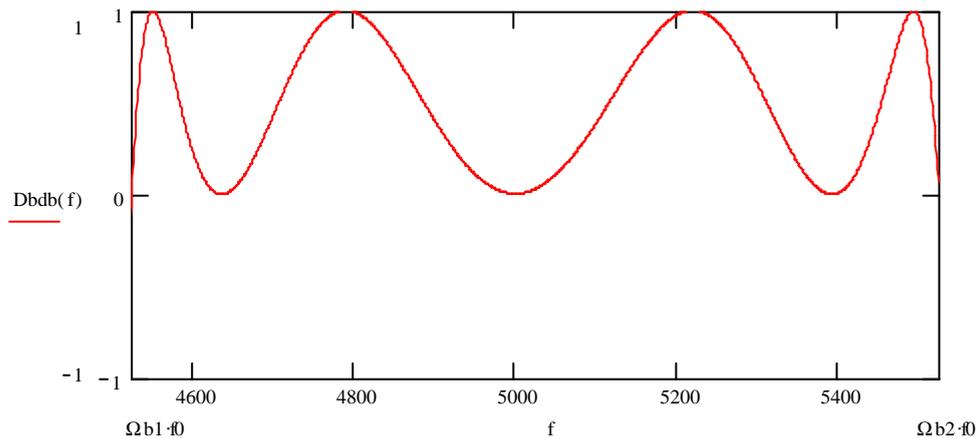


Figure 50

Le déphasage dans la bande passante est illustré par la Figure 51.

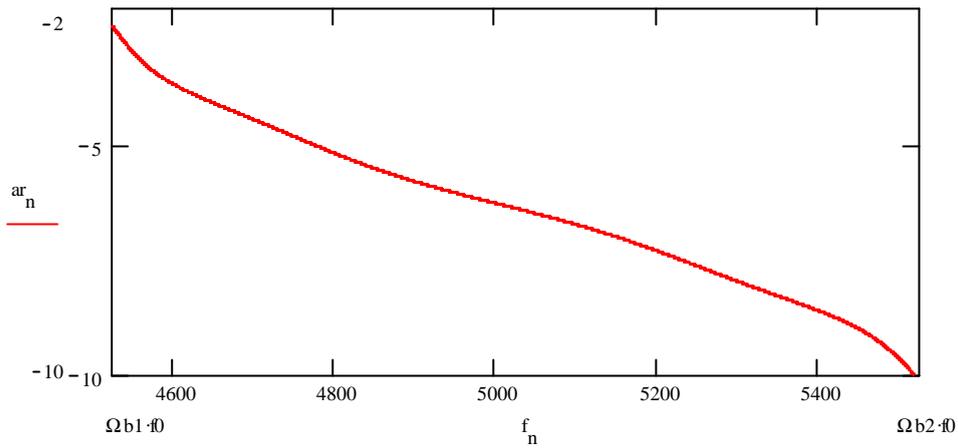


Figure 51

On voit immédiatement que la distorsion de phase est assez importante, et ce particulièrement aux bornes de la bande passante.

2.3 Transposition passe-bas - coupe-bande

La transformation d'un filtre passe-bas en un filtre coupe-bande est très similaire à celle de la transformation passe-bas \rightarrow passe-bande.

2.3.1 Transformation du gabarit

Le gabarit d'un filtre coupe-bande se transforme en gabarit de filtre passe-bas de la manière indiquée par la Figure 52.

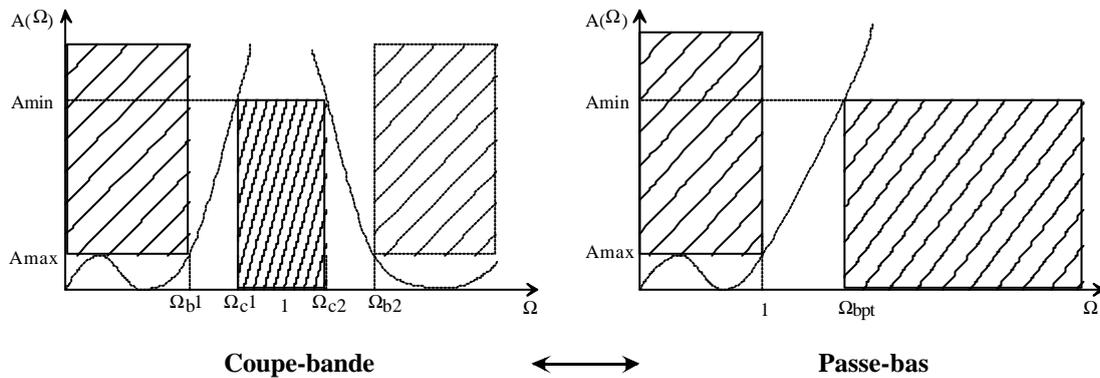


Figure 52

Remarque : par rapport à la Figure 41 de la page 31, il faut remarquer l'inversion $\Omega_b - \Omega_c$.

Les relations suivantes sont valables :

$$\begin{aligned}
 B &= \Omega_{b2} - \Omega_{b1} \\
 \Omega_{pbt} &= \frac{B}{\Omega_{c2} - \Omega_{c1}} \\
 \Omega_{c1} \cdot \Omega_{c2} &= 1 \\
 \Omega_{b1} \cdot \Omega_{b2} &= 1
 \end{aligned} \tag{58}$$

De (58), on déduit :

$$\begin{aligned}
 \Omega_{b1} &= -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1} \\
 \Omega_{b2} &= \frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + 1}
 \end{aligned} \tag{59}$$

2.3.2 Transformation de la fonction de transfert

La variable complexe normalisée $S=j\cdot\Omega$ subit la transformation suivante

$$S \leftrightarrow \frac{B \cdot S}{S^2 + 1} \tag{60}$$

Donc la transformation de la fonction de transfert est la suivante :

$$H_{\text{CoupeBande}}(S) = H_{\text{PasseBas}}\left(\frac{B \cdot S}{S^2 + 1}\right) \tag{61}$$

L'ordre du filtre coupe-bande est ici aussi doublé par rapport au filtre passe-bas.

2.3.3 Exemple avec filtre de Bessel

On veut un filtre coupe-bande de type Bessel, qui ait une bande de réjection comprise entre 300 et 400 Hz. A ces fréquences, l'affaiblissement minimal est de 35 dB. On veut un affaiblissement maximal de 3 dB dès 700 Hz.

Remarque : ce filtre est dual à celui que nous avons examiné au §2.2.3.

On pose :

$$f_0 = \sqrt{300 \cdot 400} = 346.4 \text{ Hz} \tag{62}$$

Limites normalisées de la bande de réjection :

$$\begin{aligned}
 \Omega_{c1} &= \frac{300 \text{ Hz}}{f_0} = 0.87 \\
 \Omega_{c2} &= \frac{400 \text{ Hz}}{f_0} = 1.16
 \end{aligned} \tag{63}$$

Filtres actifs

Limites normalisées de la bande passante, et bande passante normalisée :

$$\begin{aligned}\Omega_{B2} &= \frac{700\text{Hz}}{f_0} = 2.021 \\ \Omega_{B1} &= \frac{1}{\Omega_{B2}} = 0.495 \\ B &= \Omega_{B2} - \Omega_{B1} = 1.526 \\ \Omega_{\text{pbt}} &= \frac{B}{\Omega_{C2} - \Omega_{C1}} = 5.286\end{aligned}\quad (64)$$

Le gabarit équivalent passe-bas est donc strictement équivalent à celui de la Figure 43 (voir page 33).

Le filtre de Bessel qui satisfait ce gabarit est donné par (10) :

$$H_{\text{BP}}(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot S^2 + 1.3397 \cdot S + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot S^2 + 0.7743 \cdot S + 1} \quad (65)$$

On remplace S suivant la transformation (60) :

$$H_{\text{CP}}(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot \left(\frac{B \cdot S}{S^2 + 1}\right)^2 + 1.3397 \cdot \frac{B \cdot S}{S^2 + 1} + 1} \cdot \frac{1}{0.389 \cdot \left(\frac{B \cdot S}{S^2 + 1}\right)^2 + 0.7743 \cdot \frac{B \cdot S}{S^2 + 1} + 1} \quad (66)$$

$$H_{\text{CP}}(S) = \frac{(S^2 + 1)^2}{0.4889 \cdot B^2 \cdot S^2 + 1.3397 \cdot (S^2 + 1) + (S^2 + 1)^2} \cdot \frac{(S^2 + 1)^2}{0.389 \cdot B^2 \cdot S^2 + 0.7743 \cdot (S^2 + 1) + (S^2 + 1)^2} \quad (67)$$

Ici également, des zéros apparaissent !

Si on remplace la variable $S = j \cdot f / f_0$, on trouve le gain $|H(f)|$ illustré par la Figure 53. Le gain à -3dB est montré également.

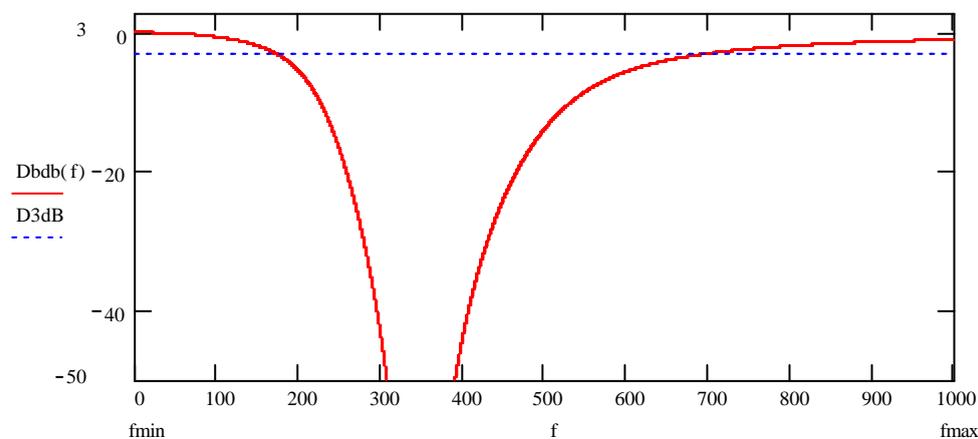


Figure 53

Filtres actifs

La phase après 700 Hz est illustrée par la Figure 54.

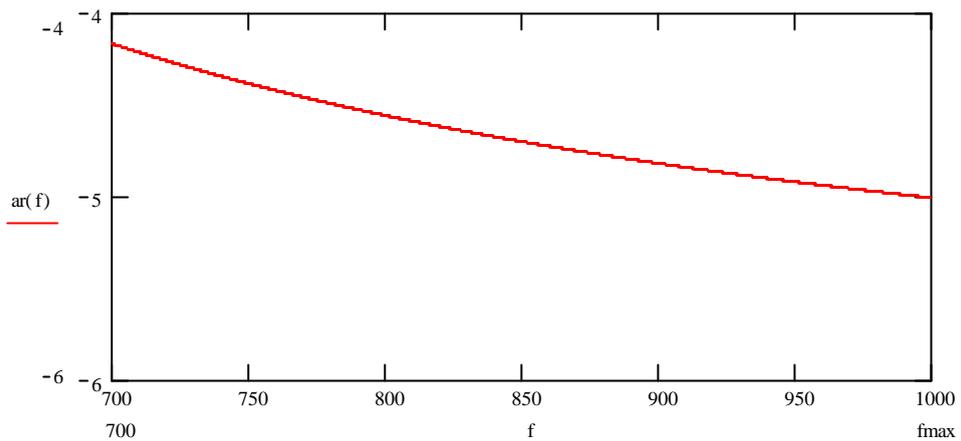


Figure 54

On peut montrer que la phase est également excellente entre 0 et 170 Hz (deuxième fréquence à 3dB d'affaiblissement). Une fois de plus, les caractéristiques du filtre de Bessel sont vérifiées.

3 Réalisation électronique

Comme nous l'avons déjà vu au §1.3, la réalisation d'un filtre se fera à l'aide de cellules du premier et du second ordre. Cela signifie qu'avec un amplificateur opérationnel, on pourra réaliser une 'cascade' d'ordre 2 au maximum. Donc, pour prendre un exemple, un filtre d'ordre 8 nécessitera 4 amplificateurs.

Limitations : ce chapitre ne va pas traiter les deux cas suivants :

- a) Les filtres qui ont des zéros (typiquement les filtres elliptiques) ne seront pas traités ici. Leur réalisation est cependant possible avec une structure plus compliquée que celle dite de 'multiple feedback' (voir §3.2 page 44).
- b) Les filtres de type coupe-bande ne seront pas traités ici non plus. Leur réalisation est également possible avec une structure plus compliquée que celle dite de 'multiple feedback' (voir §3.2 page 44).

3.1 Ordre des cascades

L'ordre dans lequel les cellules doivent être arrangées est très important et doit faire l'objet d'une attention toute particulière. Les quelques petites astuces indiquées dans ce chapitre ne doivent donc pas être prises au pied de la lettre.

Les règles qui régissent l'ordre des cascades sont quelque peu différentes selon que l'on conçoit un filtre de type passe-bas/passe-haut ou de type passe-bande. Les différences seront expliquées au fur et à mesure dans ce chapitre.

Une fonction de transfert d'ordre 2 pour une cellule passe-bas est conformément à (2) et (5) la suivante :

$$F(f) = \frac{G \cdot \omega_p^2}{\omega_p^2 - (2\pi f)^2 + j \cdot \frac{\omega_p}{Q_p} \cdot 2\pi f} \quad (68)$$

La fonction $|F(f)|$ a l'allure décrite par la Figure 55.

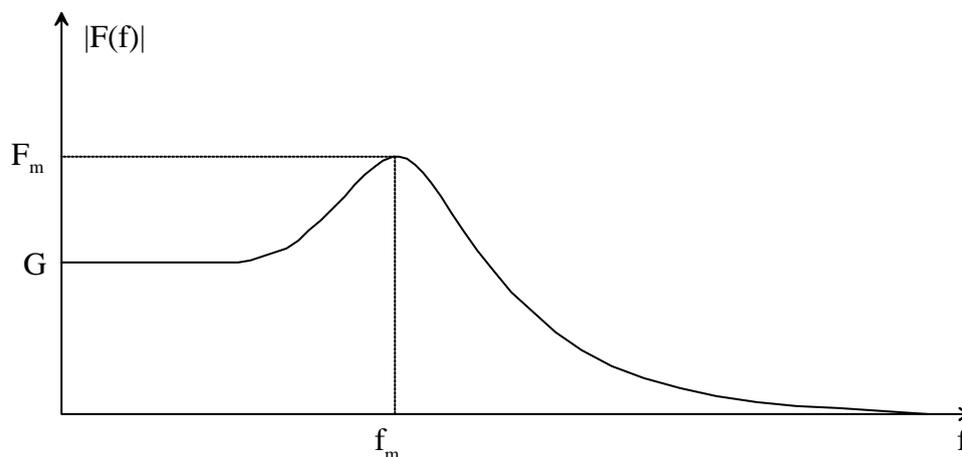


Figure 55

On trouve analytiquement :

$$f_m = \frac{\omega_p}{2\pi} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot q_p^2}}$$

$$F_m = G \cdot \frac{q_p}{\sqrt{1 - \frac{1}{4 \cdot q_p^2}}} \quad (69)$$

On voit que plus q_p est grand, plus la valeur de gain maximale F_m est grande également. Pour $q_p > 2$, on trouve $F_m \approx G \cdot q_p$. Le danger avec une telle cellule est de SATURER LES AMPLIS aux alentours de la fréquence f_m !

Imaginons la situation suivante : un filtre passe-bas d'ordre 6 et de gain 2 sur sa bande passante nécessite trois cascades dont les facteurs de qualité sont respectivement 1, 3 et 7. Le signal d'entrée a une dynamique de $-5V..+5V$, et les amplis sont alimentés avec $-15V$ et $+15V$.

Si on place en premier la cellule qui a un facteur de qualité de 7, et si on lui assigne par exemple un gain de 1, on aura un signal de sortie peak pour cette cellule de $1 \cdot 7 \cdot 5V = 35V$ aux alentours de f_m : les amplis vont saturer à coup sûr.

Si au contraire on place en dernier la cellule qui a un facteur de qualité de 7, et même en lui assignant un gain de 2, on ne devrait pas rencontrer de problème ! En effet, comme le filtre global a une fonction de transfert égale à 1 sur l'ensemble de sa bande passante, cela signifie que la réponse en amplitude $|H(f)|$ aux alentours de f_m aura été affaiblie de $1/7$ par les cellules précédentes ! On aura donc un gain maximum pour cette cellule de $2 \cdot 7 \cdot (1/7) \cdot 5 = 10V$: aucun problème pour les amplis.

A noter que ce raisonnement est valable seulement pour les cellules de type passe-bas et passe-haut.

Quant aux cellules de type passe-bande, seul le gain G est à prendre en considération : le facteur de qualité q_p n'intervient pas dans le gain maximum (voir les équations (84) et (85) page 49).

Conclusion : Pour chaque cellule de type passe-bas ou passe-haut, on cherche la valeur F_m selon l'équation (69).

Pour les cellules de type passe-bande, on effectue seulement $F_m = G$. Le gain G est défini par les équations (84) et (85) page 49.

Il est judicieux de placer les cellules pour lesquelles F_m est le plus faible en premier, c'est à dire proches du signal d'entrée. A l'inverse, il est judicieux de placer les cellules pour lesquelles F_m est le plus élevé en dernier, c'est à dire proches du signal de sortie.

Quoi qu'il en soit, il est très important de vérifier le signal reçu et transmis de chaque cellule d'un filtre en cascade.

3.1.1 Sensibilité d'une cellule

On montre que la réponse $|F(f)|$ d'une cellule de second ordre est d'autant plus sensible à la précision de ses composants électroniques (résistances, condensateurs et amplis) si q_p est grand. Cette sensibilité se manifeste tout particulièrement aux alentours de la fréquence f_m , comme l'illustre la Figure 56.

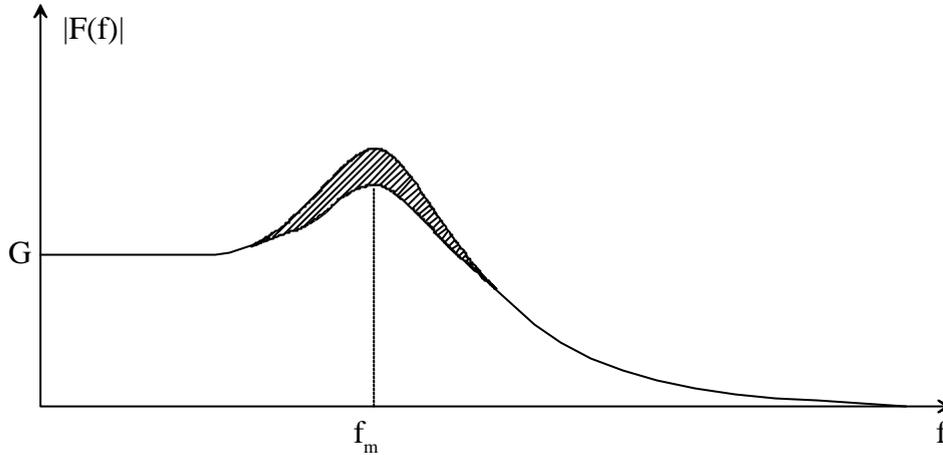


Figure 56

Si le facteur de qualité d'une cellule est plus grand que 10, il est alors judicieux de s'orienter vers une structure à deux amplificateurs, moins sensible aux variations des composants. On trouve de telles structures dans la littérature (voir Paul Bildstein, "Filtres actifs").

A noter que ce raisonnement est valable pour tous les types de cellules (passe-bas, passe-haut et passe-bande).

3.2 Cellule 'Multiple Feedback'

Une cellule dite 'multiple feedback' est composée de la manière suivante :

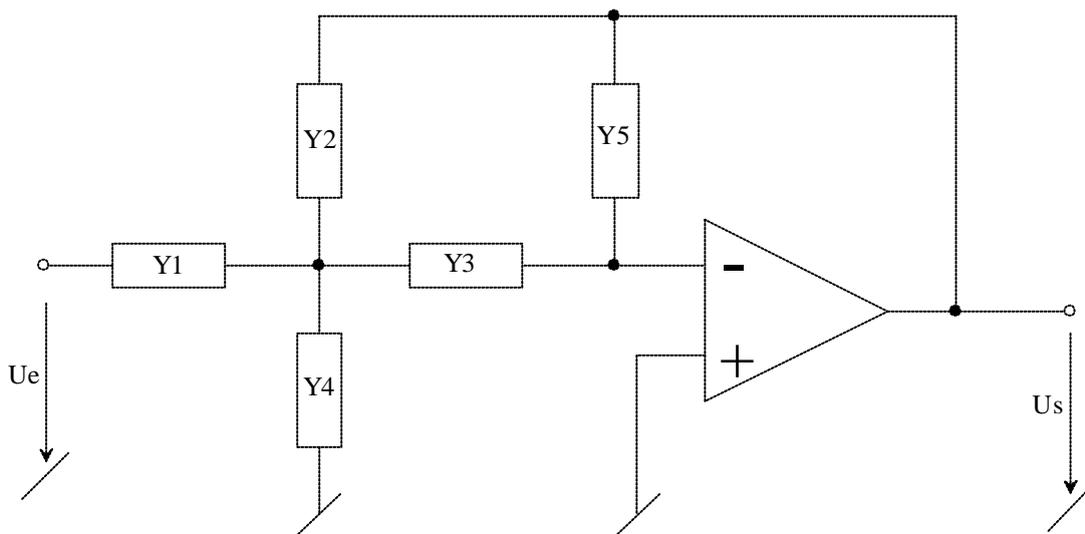


Figure 57

Filtres actifs

La fonction de transfert d'une telle cellule est la suivante :

$$H(S) = \frac{U_s(S)}{U_e(S)} = \frac{-Y_1 \cdot Y_3}{Y_5 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_2 \cdot Y_3} \quad (70)$$

avec les admittances :

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1} \quad (71)$$

A noter que cette cellule génère systématiquement un déphasage de 180° dans la bande passante.

3.2.1 Cellule passe-bas

Une cellule de type passe-bas est composée ainsi :

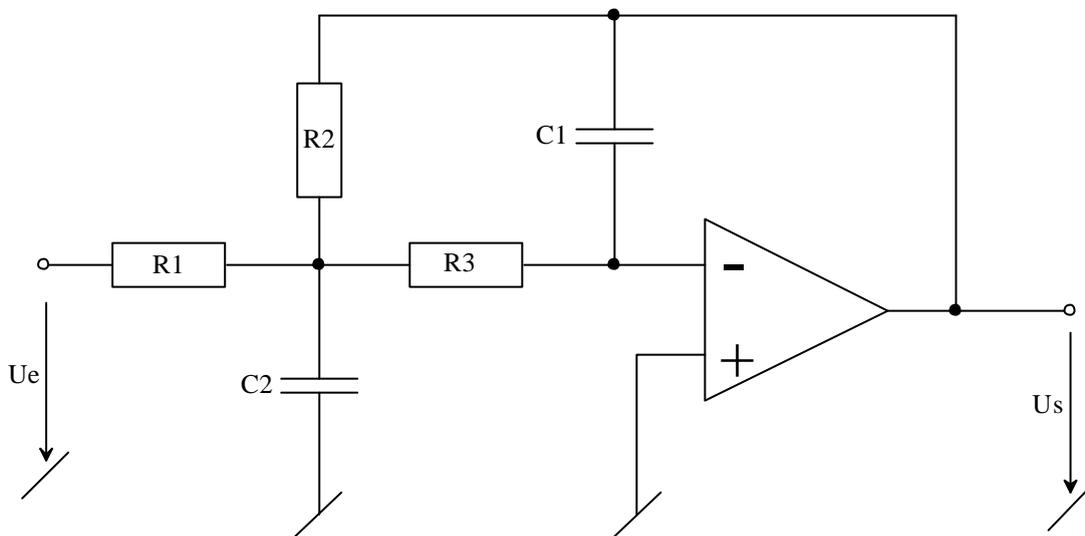


Figure 58

On trouve les relations (la variable normalisée S est employée ici, voir (2)):

$$H(S) = \frac{U_s(S)}{U_e(S)} = \frac{-G \cdot \Omega_p^2}{S^2 + \frac{\Omega_p}{q_p} \cdot S + \Omega_p^2} \quad (72)$$

avec :

- G : Gain de la cellule
- Ω_p : Module normé du pôle de la cellule (= ω_p/ω_0)
- q_p : Facteur de qualité de la cellule

On trouve analytiquement :

$$G = \frac{R2}{R1}$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \cdot \sqrt{C1 \cdot C2 \cdot R2 \cdot R3}} \quad (73)$$

$$q_p = \sqrt{\frac{C2}{C1}} \cdot \frac{R1 \cdot \sqrt{R2 \cdot R3}}{R1 \cdot R2 + R1 \cdot R3 + R2 \cdot R3}$$

Le $\omega_0 (= 2\pi f_0)$ de l'équation (73) est la pulsation de référence définie par (2). Pour obtenir la cellule souhaitée, nous avons trois équations et cinq inconnues. La marge de manœuvre est donc confortable. Les logiciels de calcul de filtre utilisent des algorithmes récursifs pour trouver la meilleure solution.

Si on décide de fixer les valeurs des deux capacités $C1$ et $C2$ ¹, alors on n'a plus que les trois inconnues $R1$, $R2$ et $R3$. On trouve dans ce cas :

$$R1 = \frac{1}{2 \cdot G \cdot q_p \cdot \Omega_p \cdot \omega_0 \cdot C1} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cdot q_p^2 \cdot (G+1) \cdot C1}{C2}} \right)$$

$$R2 = G \cdot R1 \quad (74)$$

$$R3 = \frac{1}{\Omega_p^2 \cdot \omega_0^2 \cdot C1 \cdot C2 \cdot R2}$$

Le signe ' \pm ' pour la recherche de $R1$ dans (74) signifie qu'on peut en fait choisir l'un ou l'autre. Par la suite, nous utiliserons le signe '+'.¹

3.2.1.1 Exemple

Nous allons prendre pour exemple la première cellule de l'exemple du §1.5.4.2 page 11.

$$H_1(S) = \frac{1.402}{S^2 + 0.906 \cdot S + 1.402} \quad (75)$$

avec $f_0 = 5$ kHz :

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 31416 \cdot s^{-1}$$

$$G = 1$$

$$\Omega_p = \sqrt{1.402} = 1.184 \quad (76)$$

$$q_p = \frac{1.184}{0.906} = 1.31$$

On pose arbitrairement : $C1 = 470$ pF et $C2 = 10$ nF. On trouve selon (74) :

$$R1 = 35 \text{ k}\Omega$$

$$R2 = 35 \text{ k}\Omega \quad (77)$$

$$R3 = 4.4 \text{ k}\Omega$$

¹ Il est beaucoup plus facile d'ajuster des valeurs de résistances que de capacités. C'est pourquoi on fixe souvent la valeur des capacités en premier.

3.2.2 Cellule passe-haut

Une cellule de type passe-haut est composée ainsi :

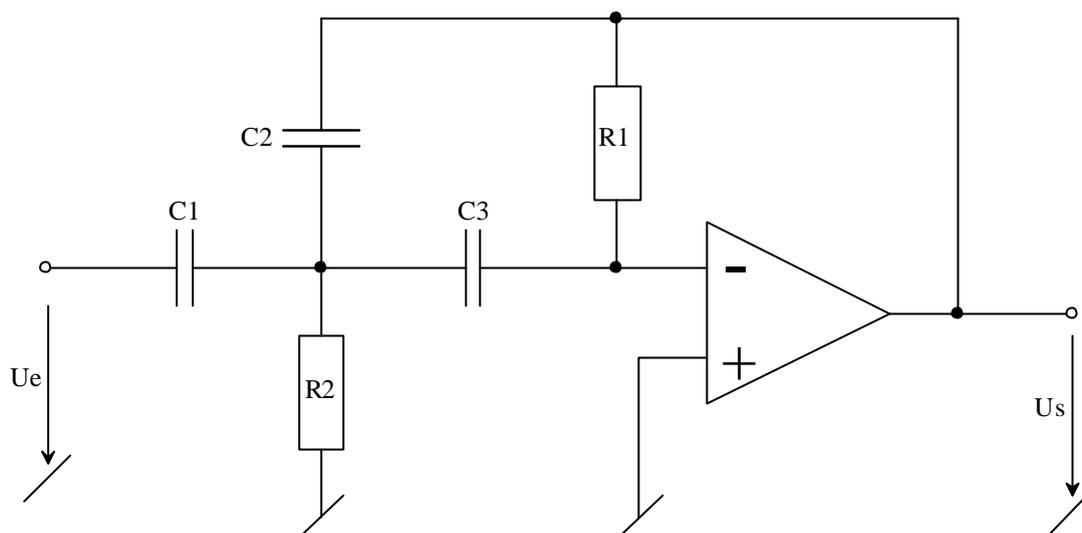


Figure 59

On trouve les relations (la variable normalisée S est employée ici, voir (2)):

$$H(S) = \frac{U_s(S)}{U_e(S)} = \frac{-G_\infty \cdot S^2}{S^2 + \frac{\Omega_p}{q_p} \cdot S + \Omega_p^2} \quad (78)$$

avec :

G_∞ : Gain de la cellule lorsque $\Omega \gg 1$
 Ω_p : Module normé du pôle de la cellule ($= \omega_p/\omega_0$)
 q_p : Facteur de qualité de la cellule

On trouve analytiquement :

$$G_\infty = \frac{C1}{C2}$$

$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \cdot \sqrt{R1 \cdot R2 \cdot C2 \cdot C3}} \quad (79)$$

$$q_p = \sqrt{\frac{R1}{R2}} \cdot \frac{\sqrt{C2 \cdot C3}}{C1 + C2 + C3}$$

Le $\omega_0 (= 2\pi f_0)$ de l'équation (79) est la pulsation de référence définie par (2). Pour obtenir la cellule souhaitée, nous avons à nouveau trois équations et cinq inconnues.

Filtres actifs

Si on décide de fixer les valeurs des deux capacités C2 et C3, alors on n'a plus que les trois inconnues R1, R2 et C1. On trouve dans ce cas :

$$\begin{aligned}C1 &= G_{\infty} \cdot C2 \\R1 &= \frac{q_p}{\Omega_p \cdot \omega_0} \cdot \frac{C1 + C2 + C3}{C2 \cdot C3} \\R2 &= \frac{1}{\Omega_p^2 \cdot \omega_0^2 \cdot R1 \cdot C2 \cdot C3}\end{aligned}\tag{80}$$

3.2.2.1 Exemple

Nous allons prendre pour exemple la première cellule de l'exemple du §2.1.3 page 25.

$$H_1(S) = \frac{1.402 \cdot S^2}{1 + 0.906 \cdot S + 1.402 \cdot S^2} = \frac{S^2}{S^2 + 0.646 \cdot S + 0.713}\tag{81}$$

avec $f_0 = 10$ kHz :

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi f_0 = 62830 \cdot s^{-1} \\G &= 1 \\ \Omega_p &= \sqrt{0.713} = 0.845 \\ q_p &= \frac{0.845}{0.646} = 1.31\end{aligned}\tag{82}$$

On pose arbitrairement : C2 = 1 nF et C3 = 1 nF. On trouve selon (80) :

$$\begin{aligned}C1 &= 1 \text{ nF} \\R1 &= 74 \text{ k}\Omega \\R2 &= 4.8 \text{ k}\Omega\end{aligned}\tag{83}$$

3.2.3 Cellule passe-bande

Une cellule de type passe-bande est composée ainsi :

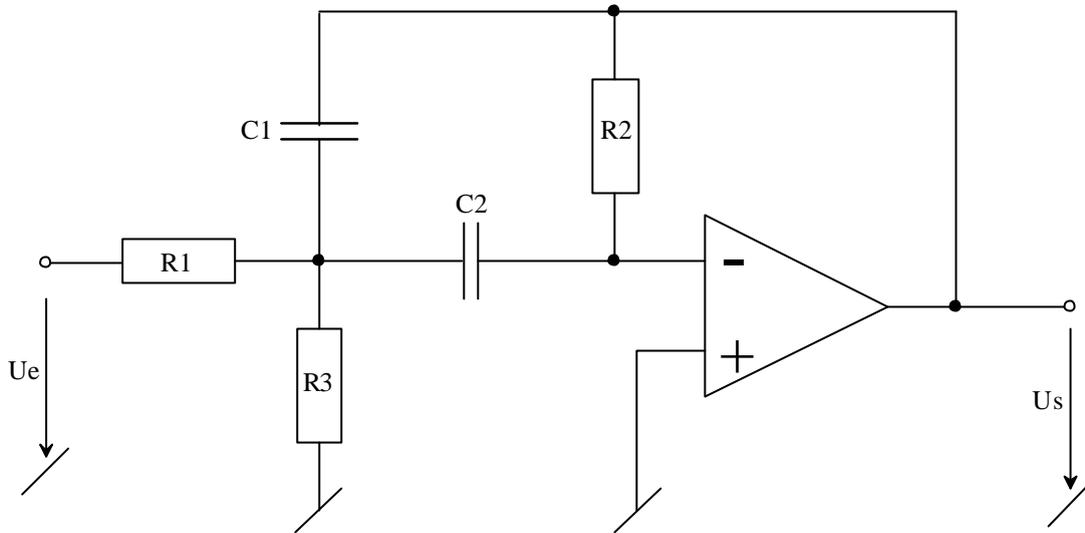


Figure 60

On trouve les relations (la variable normalisée S est employée ici, voir (2)):

$$H(S) = \frac{U_s(S)}{U_e(S)} = \frac{-G \cdot \frac{\Omega_p}{q_p} \cdot S}{S^2 + \frac{\Omega_p}{q_p} \cdot S + \Omega_p^2} \quad (84)$$

avec :

- G : Gain de la cellule lorsque $\Omega = \Omega_p$
- Ω_p : Module normé du pôle de la cellule ($= \omega_p/\omega_0$)
- q_p : Facteur de qualité de la cellule

On trouve analytiquement :

$$\begin{aligned} G &= \frac{R2}{R1} \cdot \frac{C2}{C1 + C2} \\ \Omega_p &= \frac{\omega_p}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{R1 + R3}{C1 \cdot C2 \cdot R1 \cdot R2 \cdot R3}} \\ q_p &= \frac{\sqrt{C1 \cdot C2}}{C1 + C2} \cdot \sqrt{\frac{R2 \cdot (R1 + R3)}{R1 \cdot R3}} \end{aligned} \quad (85)$$

Le $\omega_0 (= 2\pi f_0)$ de l'équation (85) est la pulsation de référence définie par (2). Pour obtenir la cellule souhaitée, nous avons à nouveau trois équations et cinq inconnues.

Filtres actifs

Si on décide de fixer les valeurs des deux capacités C1 et C2, alors on n'a plus que les trois inconnues R1, R2 et R3. On trouve dans ce cas :

$$\begin{aligned} R1 &= \frac{q_p}{G \cdot \Omega_p \cdot \omega_0 \cdot C1} \\ R2 &= G \cdot R1 \cdot \frac{C1 + C2}{C2} \\ R3 &= G \cdot R1 \cdot \frac{C1}{q_p^2 \cdot (C1 + C2) - G \cdot C1} \end{aligned} \quad (86)$$

3.2.3.1 Exemple

Nous allons prendre pour exemple la première partie de l'exemple du §2.2.3 page 32.

$$H_{p1}(S) = \frac{1}{0.4889 \cdot \left(\frac{S^2 + 1}{0.29 \cdot S} \right)^2 + 1.3397 \cdot \frac{S^2 + 1}{0.29 \cdot S} + 1} \quad (87)$$

avec $f_0 = 346.4$ Hz. Cette équation d'ordre 4 doit être réduite à deux cellules d'ordre 2. Heureusement, Mathcad est magique... On trouve, à la suite de quelques manipulations, l'équation équivalente suivante :

$$H_{p1}(S) = \frac{0.415 \cdot S}{S^2 + 0.412 \cdot S + 1.129} \cdot \frac{0.415 \cdot S}{S^2 + 0.373 \cdot S + 0.886} \quad (88)$$

Dans cet exemple, on va réaliser les deux cellules de H_{p1} .

Première cellule :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi f_0 = 2176 \cdot s^{-1} \\ G &= \frac{0.415}{0.412} = 1.0073 \\ \Omega_p &= \sqrt{1.129} = 1.0625 \\ q_p &= \frac{1.0625}{0.412} = 2.579 \end{aligned} \quad (89)$$

On pose arbitrairement : C2 = 47 nF et C3 = 47 nF. On trouve selon (86) :

$$\begin{aligned} R1 &= 23.6 \text{ k}\Omega \\ R2 &= 47.5 \text{ k}\Omega \\ R3 &= 1.9 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad (90)$$

Seconde cellule :

$$\begin{aligned} G &= \frac{0.415}{0.373} = 1.113 \\ \Omega_p &= \sqrt{0.886} = 0.941 \\ q_p &= \frac{0.941}{0.373} = 2.524 \end{aligned} \quad (91)$$

Filtres actifs

On pose arbitrairement : $C2 = 47 \text{ nF}$ et $C3 = 47 \text{ nF}$. On trouve selon (86) :

$$\begin{aligned}R1 &= 23.6 \text{ k}\Omega \\R2 &= 52.4 \text{ k}\Omega \\R3 &= 2.3 \text{ k}\Omega\end{aligned}\tag{92}$$

3.2.3.2 Réalisation électronique du filtre

A l'aide de ces deux cellules, on n'a que la première partie du filtre passe-bande décrit au §2.2.3 ! La seconde partie nécessite encore deux cellules (cellules 3 et 4), dont la réalisation est similaire à ce qu'on vient de voir ici.

On montre que la cellule 3, parmi toutes les solutions possibles, peut se modéliser ainsi :

$$\begin{aligned}q_p &= 3.5 \\G &= 1.36 \\C1 = C2 &= 47 \text{ nF} \\R1 &= 21 \text{ k}\Omega \\R2 &= 57.3 \text{ k}\Omega \\R3 &= 1.2 \text{ k}\Omega\end{aligned}\tag{93}$$

De la même manière, on montre que la cellule 4 peut se modéliser ainsi :

$$\begin{aligned}q_p &= 3.5 \\G &= 1.97 \\C1 = C2 &= 47 \text{ nF} \\R1 &= 21 \text{ k}\Omega \\R2 &= 82.8 \text{ k}\Omega \\R3 &= 1.8 \text{ k}\Omega\end{aligned}\tag{94}$$

Le montage final du filtre est illustré par la Figure 61.

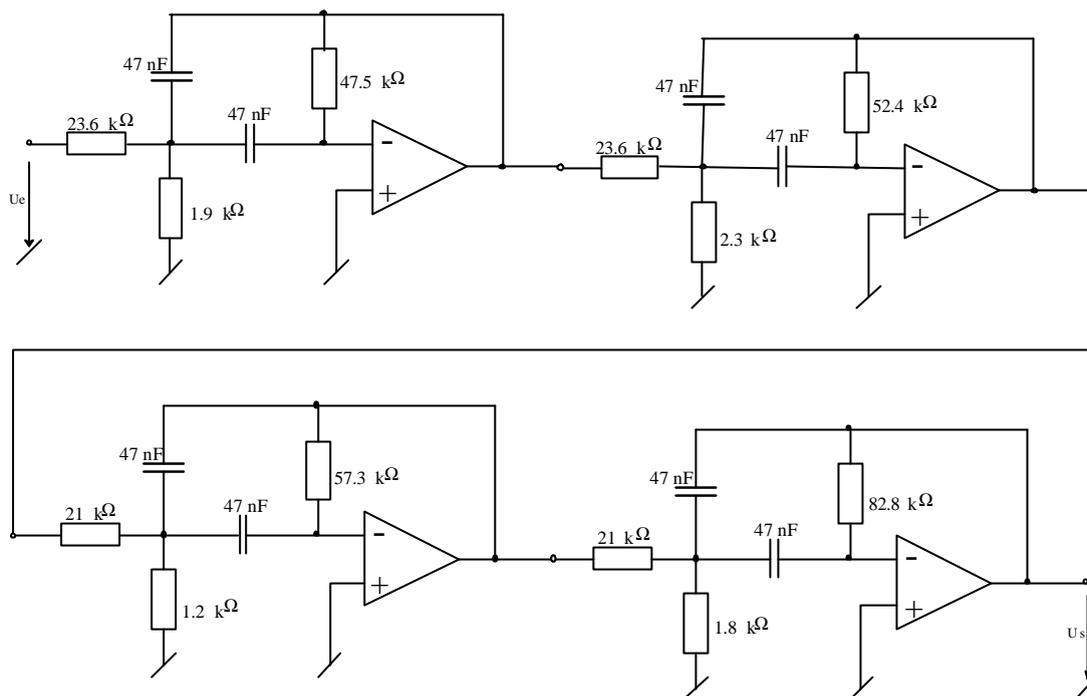


Figure 61

3.3 Cellule passe-bas d'ordre 1

Une cellule passe-bas d'ordre 1 a forcément un seul pôle négatif réel. Elle s'exprime ainsi :

$$H(S) = \frac{G}{1 + \alpha \cdot S} \quad (95)$$

On peut la réaliser de deux manières : à l'aide d'un simple filtre RC ou à l'aide d'un amplificateur opérationnel.

3.3.1 Réalisation à l'aide d'un filtre RC simple

Cette réalisation a le défaut d'avoir une impédance de sortie non-nulle. Cela n'a pas (trop) d'importance si on attaque ensuite un circuit à très haute impédance d'entrée et qui ne consomme pas de courant. Si au contraire on attaque un circuit qui a une faible impédance d'entrée, ou encore un circuit qui consomme du courant (convertisseurs A/D !), alors il vaut mieux se tourner vers une solution à amplificateur. Par ailleurs, le gain G d'un tel filtre est forcément 1.

Il est clair que dans le cadre d'un filtre d'ordre impair, le circuit RC doit être la dernière cellule, puisque toutes les autres ont une impédance d'entrée pas très haute.

Filtres actifs

La Figure 62 nous montre un circuit RC passe-bas classique.

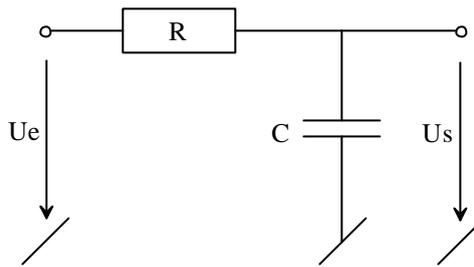


Figure 62

En fixant la valeur de la capacité C , on trouve R immédiatement :

$$R = \frac{\alpha}{\omega_0 \cdot C} \quad (96)$$

Et la fréquence 3 dB de la cellule :

$$f_{3dB} = \frac{f_0}{\alpha}$$

3.3.1.1 Exemple

Soit la fonction de transfert :

$$H(S) = \frac{1}{1 + 2 \cdot S} \quad (97)$$

avec $f_0 = 10$ kHz.

Si on fixe $C = 1$ nF, on trouve :

$$R = \frac{2}{2\pi \cdot f_0 \cdot C} = 31.8 \text{ k}\Omega \quad (98)$$

La fréquence f_{3dB} est ici différente de f_0 :

$$f_{3dB} = \frac{10 \text{ kHz}}{2} = 5 \text{ kHz} \quad (99)$$

3.3.2 Réalisation à l'aide d'un amplificateur opérationnel

Cette réalisation est idéale : impédance de sortie quasi-nulle, et possibilité de gain différent de un. Cependant, comme ce montage nécessite un ampli, on peut se poser la question de savoir s'il ne serait pas judicieux de monter l'ordre du filtre de un. Dans ce cas, on aurait un ordre forcément pair, mais le nombre d'amplis utilisés est identique.

La Figure 63 nous montre un circuit de premier ordre avec ampli.

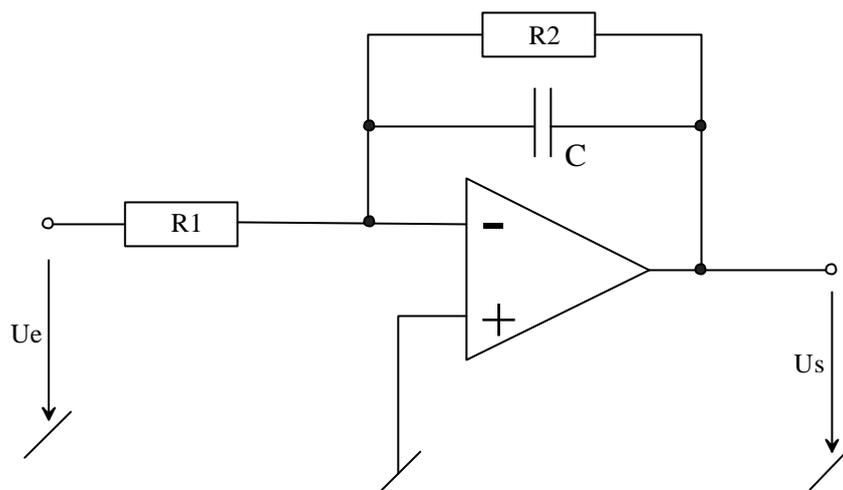


Figure 63

En fixant la valeur de la capacité C, on trouve pour R1 et R2 :

$$R2 = \frac{\alpha}{\omega_0 \cdot C} \quad (100)$$

$$R1 = \frac{R2}{G}$$

Et la fréquence 3 dB de la cellule :

$$f_{3dB} = \frac{f_0}{\alpha}$$

3.3.2.1 Exemple

Soit la fonction de transfert :

$$H(S) = \frac{3}{1 + 2 \cdot S} \quad (101)$$

avec $f_0 = 10$ kHz.

Si on fixe $C = 1$ nF, on trouve :

$$R2 = \frac{2}{2\pi \cdot f_0 \cdot C} = 31.8 \text{ k}\Omega \quad (102)$$

$$R1 = \frac{R2}{G} = 10.6 \text{ k}\Omega$$

La fréquence f_{3dB} est ici différente de f_0 :

$$f_{3dB} = \frac{10 \text{ kHz}}{2} = 5 \text{ kHz} \quad (103)$$

3.4 Cellule passe-haut d'ordre 1

Une cellule passe-bas d'ordre 1 a forcément un seul pôle négatif réel. Elle s'exprime ainsi :

$$H(S) = G \cdot \frac{\alpha \cdot S}{1 + \alpha \cdot S} \quad (104)$$

Ici également, on peut la réaliser de deux manières : à l'aide d'un simple filtre RC ou à l'aide d'un amplificateur opérationnel.

3.4.1 Réalisation à l'aide d'un filtre RC simple

Le problème est ici identique à celui que nous avons étudié au §3.3.1. Cette réalisation a le défaut d'avoir une impédance de sortie non-nulle et le gain G d'un tel filtre est forcément 1.

La Figure 64 nous montre un circuit RC passe-haut classique.

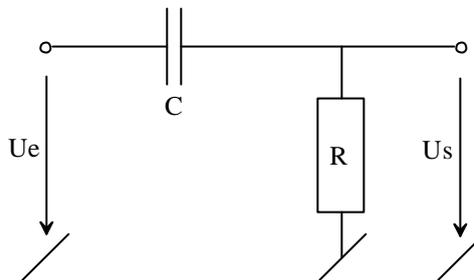


Figure 64

En fixant la valeur de la capacité C , on trouve R immédiatement :

$$R = \frac{\alpha}{\omega_0 \cdot C} \quad (105)$$

Et la fréquence 3 dB de la cellule :

$$f_{3dB} = \frac{f_0}{\alpha}$$

3.4.1.1 Exemple

Soit la fonction de transfert :

$$H(S) = \frac{2 \cdot S}{1 + 2 \cdot S} \quad (106)$$

avec $f_0 = 10$ kHz.

Si on fixe $C = 1$ nF, on trouve :

$$R = \frac{2}{2\pi \cdot f_0 \cdot C} = 31.8 \text{ k}\Omega \quad (107)$$

La fréquence f_{3dB} est ici différente de f_0 :

$$f_{3dB} = \frac{10 \text{ kHz}}{2} = 5 \text{ kHz} \quad (108)$$

3.4.2 Réalisation à l'aide d'un amplificateur opérationnel

Cette réalisation est idéale : impédance de sortie quasi-nulle, et possibilité de gain différent de un. Cependant, comme ce montage nécessite un ampli, on peut se poser la question de savoir s'il ne serait pas judicieux de monter l'ordre du filtre de un. Dans ce cas, on aurait un ordre forcément pair, mais le nombre d'amplis utilisés est identique.

La Figure 65 nous montre un circuit de premier ordre de type passe-bas avec ampli.

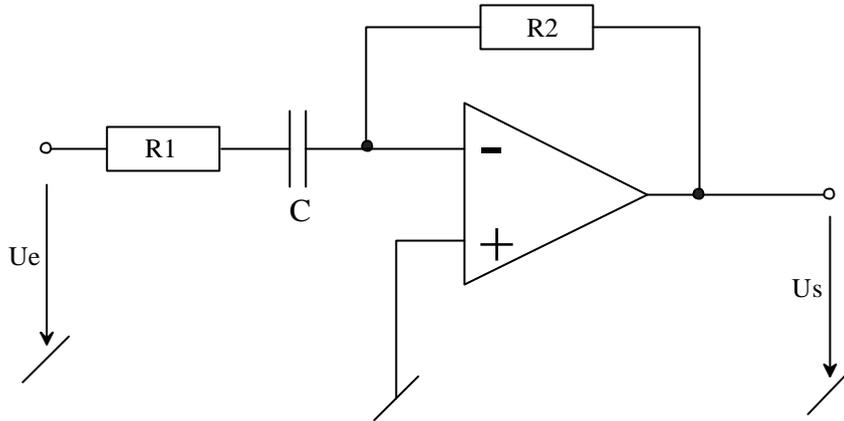


Figure 65

En fixant la valeur de la capacité C, on trouve pour R1 et R2 :

$$\begin{aligned} R1 &= \frac{\alpha}{\omega_0 \cdot C} \\ R2 &= G \cdot R1 \end{aligned} \quad (109)$$

Et la fréquence 3 dB de la cellule :

$$f_{3dB} = \frac{f_0}{\alpha}$$

3.4.2.1 Exemple

Soit la fonction de transfert :

$$H(S) = \frac{4 \cdot S}{1 + 2 \cdot S} \quad (110)$$

avec $f_0 = 10$ kHz.

Si on fixe $C = 1$ nF, on trouve :

$$\begin{aligned} R1 &= \frac{2}{2\pi \cdot f_0 \cdot C} = 31.8 \text{ k}\Omega \\ R2 &= G \cdot R1 = 2 \cdot R1 = 63.6 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad (111)$$

La fréquence f_{3dB} est ici différente de f_0 :

$$f_{3dB} = \frac{10 \text{ kHz}}{2} = 5 \text{ kHz} \quad (112)$$

Annexe: pôles et zéros

1 Introduction

Comment retrouver la fonction de transfert d'un passe-bas quand on connaît ses pôles et ses zéros ?

On pose, comme dans le cours :

$$S = \frac{s}{\omega_0} = j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} = j \cdot \frac{f}{f_0} = j \cdot \Omega \quad (1)$$

- s : variable de Laplace
- S : variable de Laplace normée
- ω_0 : pulsation de référence
- f_0 : fréquence de référence
- Ω : pulsation (ou fréquence) normée

On admet que notre fonction de transfert passe-bas possède m zéros et n pôles (avec $m < n$).

On connaît :

$$H(S) = k \cdot \frac{(S - Z_1) \cdot (S - Z_2) \cdot \dots \cdot (S - Z_m)}{(S - P_1) \cdot (S - P_2) \cdot \dots \cdot (S - P_n)} \quad (2)$$

1.1 Filtre sans zéros

Lorsque l'on n'a pas de zéros, l'équation (2) devient :

$$H(S) = k \cdot \frac{1}{(S - P_1) \cdot (S - P_2) \cdot \dots \cdot (S - P_n)} \quad (3)$$

On sait que $S=0$ lorsque $f=0$ (voir (1)). Si on veut $H(f=0)=1$, ce qui semble normal pour un passe-bas, on trouve :

$$H(0) = k \cdot \frac{1}{(-P_1) \cdot (-P_2) \cdot (\dots) \cdot (-P_n)} = 1 \quad (4)$$

Donc :

$$k = (-P_1) \cdot (-P_2) \cdot (\dots) \cdot (-P_n) \quad (5)$$

On reprend (3) :

$$H(S) = \frac{(-P_1) \cdot (-P_2) \cdot (\dots) \cdot (-P_n)}{(S - P_1) \cdot (S - P_2) \cdot \dots \cdot (S - P_n)} \quad (6)$$

Souvent, il est beaucoup plus pratique d'écrire (6) de cette manière :

$$H(S) = \frac{-P_1}{(S - P_1)} \cdot \frac{-P_2}{(S - P_2)} \cdot \dots \cdot \frac{-P_n}{(S - P_n)} \quad (7)$$

Si deux pôles sont conjugués complexes, on peut les regrouper :

$$\frac{-P_1}{(S-P_1)} \cdot \frac{-P_1^*}{(S-P_1^*)} = \frac{|P_1|^2}{S^2 - 2 \cdot \text{Re}(P_1) + |P_1|^2} \quad (8)$$

De plus, pour fixer les idées :

$$\frac{|P_1|^2}{S^2 - 2 \cdot \text{Re}(P_1) + |P_1|^2} = \frac{\Omega_p^2}{S^2 + \frac{\Omega_p}{q_p} \cdot S + \Omega_p^2} \quad (9)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \Omega_p &= |P_1| \\ q_p &= \frac{\Omega_p}{-2 \cdot \text{Re}(P_1)} \end{aligned} \quad (10)$$

1.1.1 Exemple

Imaginons un filtre avec les pôles suivants (plan de Laplace normé) :

$$P_1 = -0.5 \quad P_2 = -3 \quad P_3 = -1-2j \quad P_4 = -1+2j$$

On applique (7) :

$$H(S) = \frac{0.5}{S+0.5} \cdot \frac{3}{S+3} \cdot \frac{1+2j}{S+1+2j} \cdot \frac{1-2j}{S+1-2j} \quad (11)$$

On simplifie en tenant compte de (8) :

$$H(S) = \frac{1.5}{S^2 + 3.5 \cdot S + 1.5} \cdot \frac{5}{S^2 + 2 \cdot S + 5} \quad (12)$$

Les deux cellules de second ordre ont les caractéristiques suivantes selon (10) :

$$\begin{aligned} \Omega_{p1} &= \sqrt{1.5} & \Omega_{p2} &= \sqrt{5} \\ q_{p1} &= \frac{\sqrt{1.5}}{3.5} = 0.35 & q_{p2} &= \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.12 \end{aligned} \quad (13)$$

Si on veut $\underline{H}(f)$, on a donc selon (1) et (12) :

$$\underline{H}(f) = \frac{1.5}{1.5 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \cdot 3.5 \frac{f}{f_0}} \cdot \frac{5}{5 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \cdot 2 \frac{f}{f_0}} \quad (14)$$

1.1.2 Interprétation géométrique

Imaginons un filtre avec les pôles suivants (plan de Laplace normé) :

$$P_1 = -0.5 \quad P_2 = -3 \quad P_3 = -1-2j \quad P_4 = -1+2j$$

La variable de Laplace s est composée d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Lorsque l'on est dans le domaine de Fourier, on a le cas particulier $S=j\Omega$.

On applique (7), sachant que $k = 0.5 \cdot 3 \cdot 5 = 7.5$:

$$\underline{H}(\Omega) = k \cdot \frac{1}{j\Omega - (-0.5)} \cdot \frac{1}{j\Omega - (-3)} \cdot \frac{1}{j\Omega - (-1-2j)} \cdot \frac{1}{j\Omega - (-1+2j)} \quad (15)$$

Le résultat graphique :

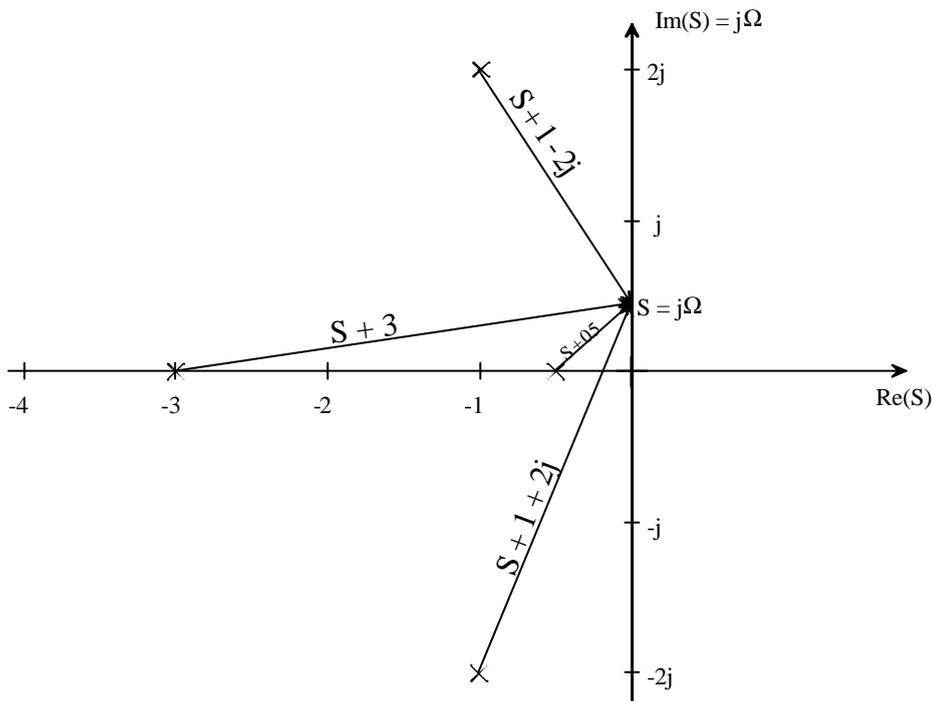


Figure 1

On voit que le module $|H(\Omega)|$ est inversement proportionnel au produit des modules des vecteurs reliant $j\Omega$ aux pôles respectifs. La phase $\arg(H(\Omega))$ est égale à moins la somme des phases de ces vecteurs.

Plus formellement, pour notre exemple :

$$|\underline{H}(\Omega)| = k \cdot \frac{1}{|j\Omega + 0.5|} \cdot \frac{1}{|j\Omega + 3|} \cdot \frac{1}{|j\Omega + 1 + 2j|} \cdot \frac{1}{|j\Omega + 1 - 2j|} \quad (16)$$

$$\arg(\underline{H}(\Omega)) = -(\arg(j\Omega + 0.5) + \arg(j\Omega + 3) + \arg(j\Omega + 1 + 2j) + \arg(j\Omega + 1 - 2j))$$

Si on va jusqu'au bout :

$$|\underline{H}(\Omega)| = k \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + 0.25}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + 9}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega + 2)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\Omega - 2)^2 + 1}} \quad (17)$$

$$\arg(\underline{H}(\Omega)) = -\left(\arctg\left(\frac{\Omega}{0.5}\right) + \arctg\left(\frac{\Omega}{3}\right) + \arctg\left(\frac{\Omega + 2}{1}\right) + \arctg\left(\frac{\Omega - 2}{1}\right) \right)$$

1.2 Filtre avec zéros

Lorsque l'on n'a pas de zéros, l'équation (2) ne change pas. Si on veut cependant $H(S=0)=1$, on trouve pour k :

$$k = \frac{(-P_1) \cdot (-P_2) \cdot (\dots) \cdot (-P_n)}{(-Z_1) \cdot (-Z_2) \cdot (\dots) \cdot (-Z_m)} \quad (18)$$

A noter que, au contraire des pôles, les zéros peuvent être situés n'importe où dans le plan complexe. S'ils ne sont pas purement réels, alors ils sont forcément conjugués complexes.

Sans s'étendre trop dans les détails, on va prendre un exemple.

1.2.1 Exemple

Imaginons un filtre avec les pôles suivants (plan de Laplace normé) :

$$P_1 = -0.5 \quad P_2 = -3 \quad P_3 = -1-2j \quad P_4 = -1+2j$$

et les zéros :

$$Z_1 = -1 \quad Z_2 = 2j \quad Z_3 = -2j$$

On réécrit (2), en calculant directement k pour que $H(0)=1$:

$$H(S) = \left[\frac{(S+1)}{1} \cdot \frac{(S-2j)}{-2j} \cdot \frac{(S+2j)}{2j} \right] \cdot \left[\frac{0.5}{S+0.5} \cdot \frac{3}{S+3} \cdot \frac{1+2j}{S+1+2j} \cdot \frac{1-2j}{S+1-2j} \right] \quad (19)$$

Bien entendu, si on cherche le facteur multiplicatif k décrit plus haut (voir (18)):

$$H(S) = k \cdot [(S+1) \cdot (S-2j) \cdot (S+2j)] \cdot \left[\frac{1}{S+0.5} \cdot \frac{1}{S+3} \cdot \frac{1}{S+1+2j} \cdot \frac{1}{S+1-2j} \right] \quad (20)$$

$$\text{avec } k = \frac{0.5 \cdot 3 \cdot (1+2j) \cdot (1-2j)}{(1) \cdot (2j) \cdot (-2j)} = \frac{7.5}{4} = 1.875$$

Si maintenant on regroupe les conjugués complexes :

$$H(S) = k \cdot [(S+1) \cdot (S^2 + 4)] \cdot \left[\frac{1}{S+0.5} \cdot \frac{1}{S+3} \cdot \frac{1}{S^2 + 2 \cdot S + 5} \right] \quad (21)$$

Annexe – pôles et zéros

Pôles et zéros doivent à présent être regroupés. En principe, on regroupe les pôles et les zéros les plus proches (voir Figure 2).

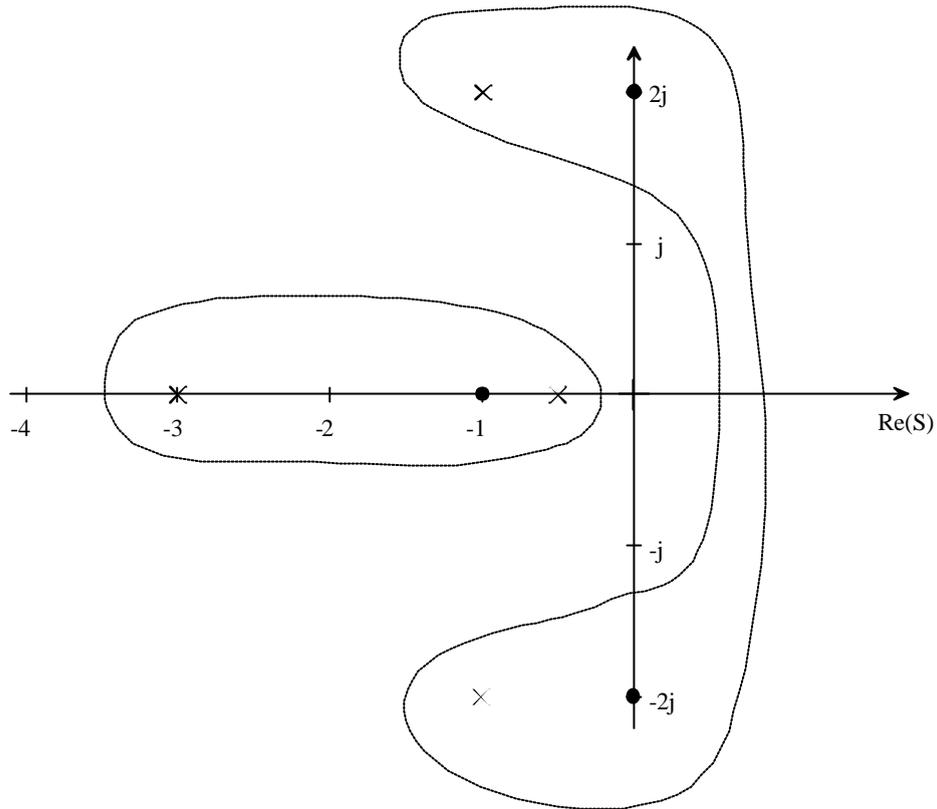


Figure 2

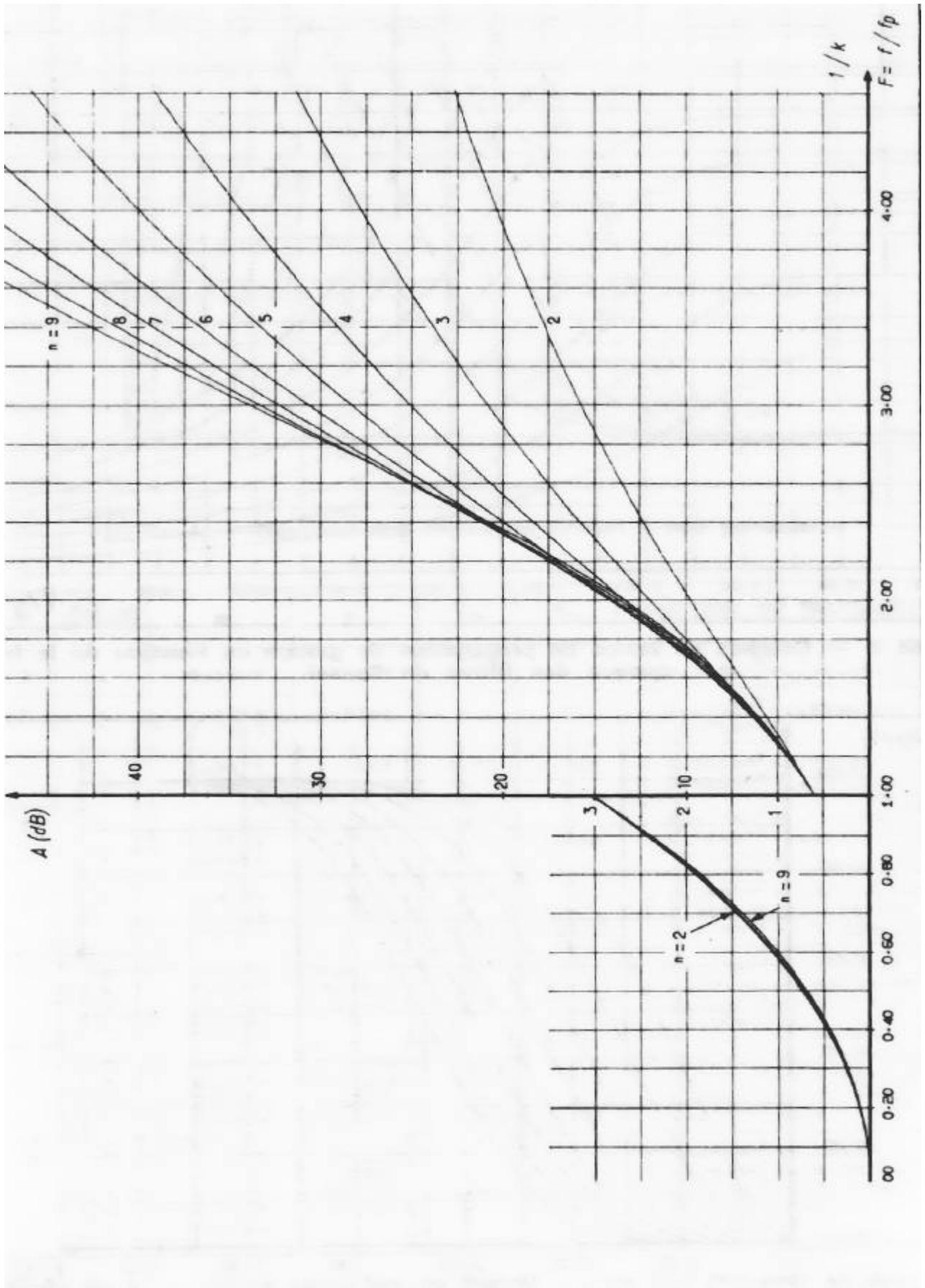
Donc :

$$H(S) = k \cdot \frac{S+1}{S^2 + 3.5 \cdot S + 1.5} \cdot \frac{S^2 + 4}{S^2 + 2 \cdot S + 5} \quad (22)$$

avec $k=1.875$

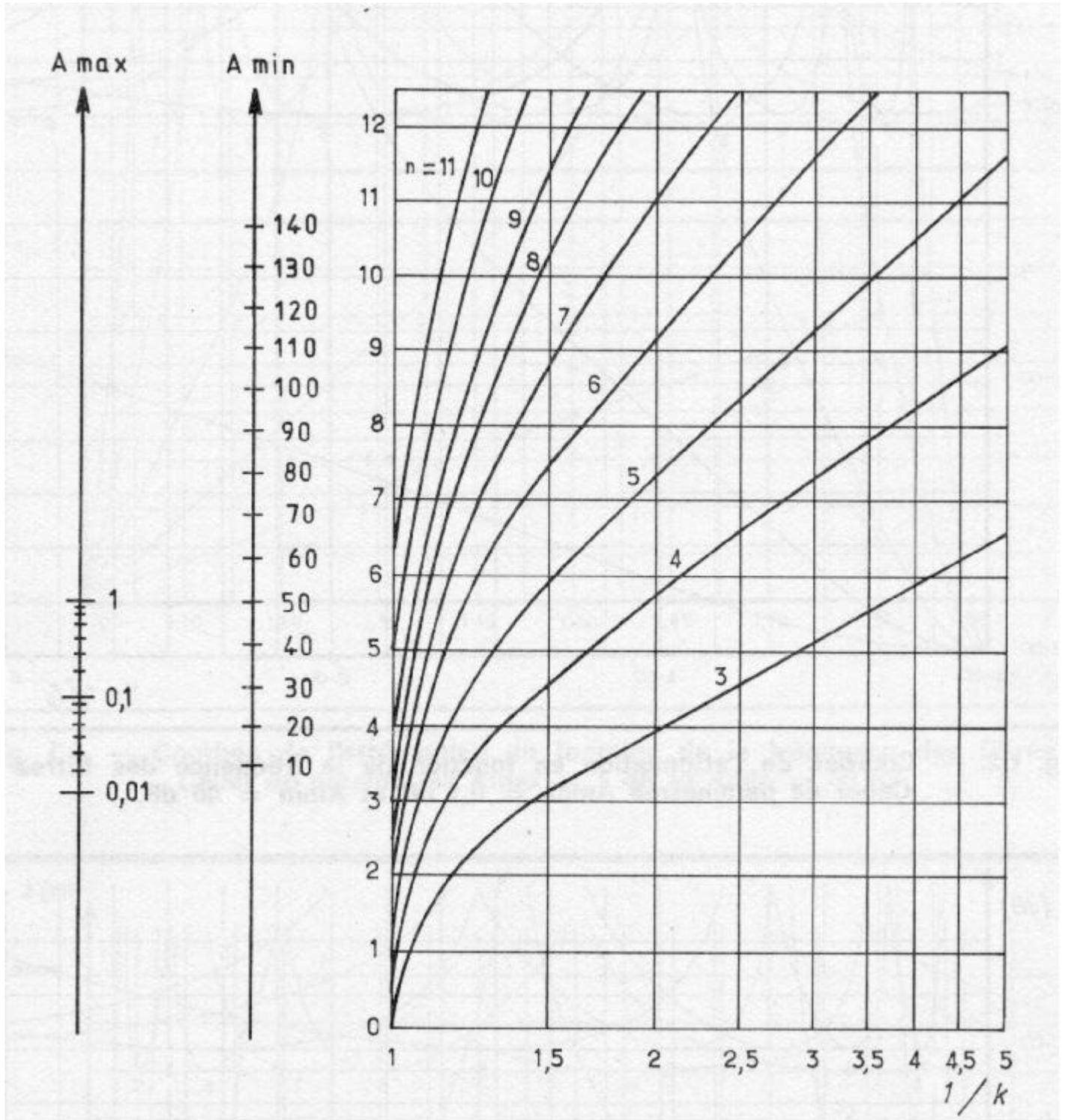
Abaque de Bessel

Cette abaque permet de déterminer l'ordre n d'un filtre de Bessel connaissant : $\Omega_r = 1/k$ et A_{min} .



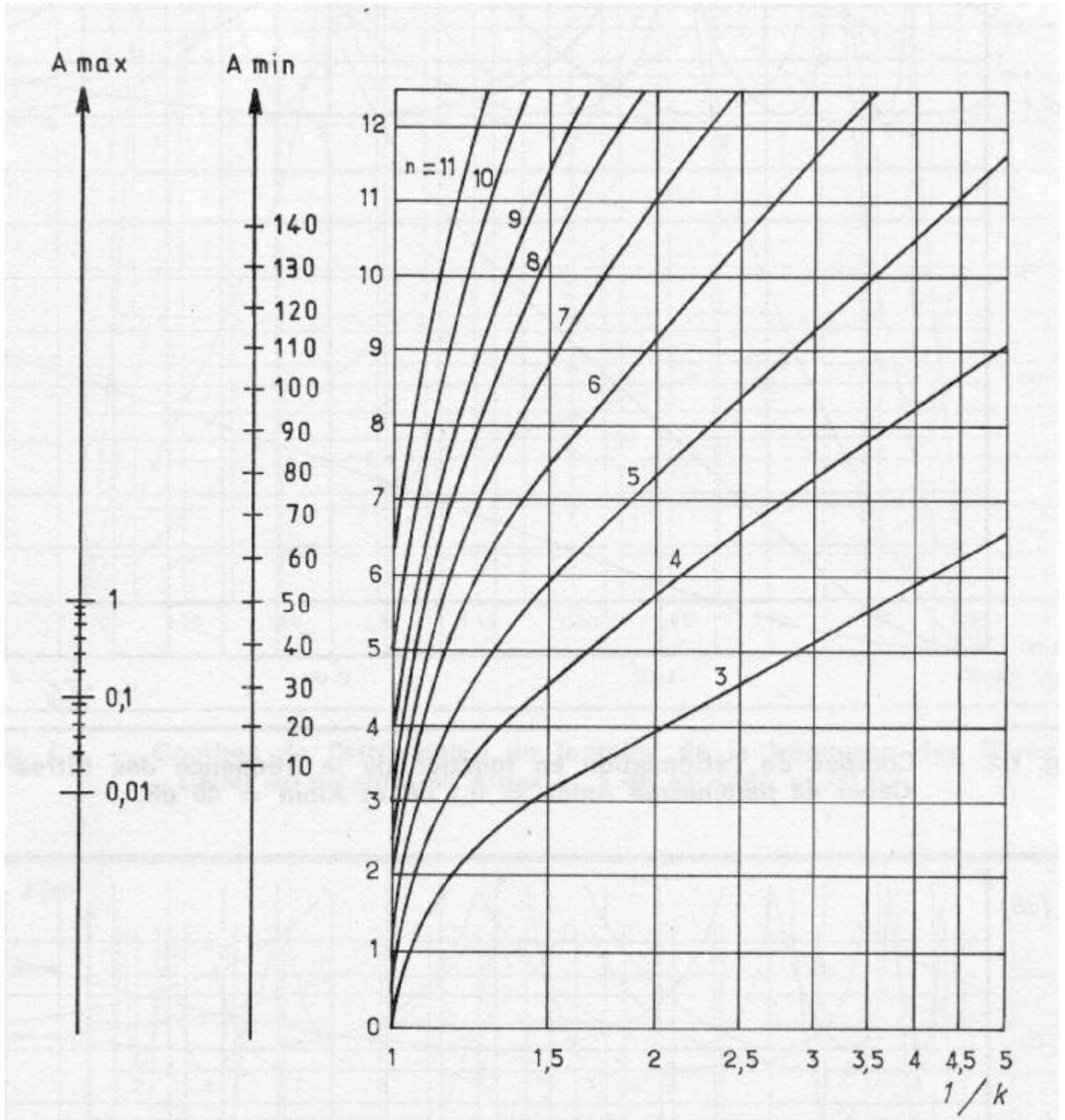
Abaque de Cauer (filtres elliptiques)

Cette abaque permet de déterminer l'ordre n d'un filtre elliptique connaissant :
 $\Omega_r = 1/k$, A_{\min} et A_{\max} .



Abaque de Cauer (filtres elliptiques)

Cette abaque permet de déterminer l'ordre n d'un filtre elliptique connaissant :
 $\Omega_r = 1/k$, A_{\min} et A_{\max} .



Filtre elliptique : paramètres

TABLEAUX ET COURBES DES FILTRES DE CAUER

N	CIRCUIT	K	m	q	q/m	F _∞	F _m	V _m	FONCTION DE TRANSMISSION							
3	1	2.644	1.0842	0.2473	0.2241	4.0429	1.439	1.070	(0.597P ² +0.5417P+1)/(0.0611P ² +1)							
	2		0.9901							(0.990P+1)						
4	1	6.094	3.0573	0.2116	0.0692	4.7251	-	-	(1.338P ² +1.8022P+1)/(0.0447P ² +1)							
	2		1.406							0.5582	0.4839	0.8669	2.0662	1.174	1.725	(0.774P ² +0.3290P+1)/(0.2342P ² +1)
5	1	1.666	1.1290	0.4602	0.4076	2.1726	-	-	(1.251P ² +1.0307P+1)/(0.2118P ² +1)							
	2		1.153							0.3024	0.6806	2.2506	1.4690	1.079	2.273	(0.875P ² +0.1867P+1)/(0.4633P ² +1)
	3		1.4912							1.4912	1.491P+1)					
6	1	5.524	3.6326	0.2758	0.0759	3.6245	-	-	(2.080P ² +2.2719P+1)/(0.0761P ² +1)							
	2		1.191							0.5242	0.6652	1.2688	1.5032	0.990	1.034	(1.140P ² +0.5395P+1)/(0.4425P ² +1)
	3		1.069							0.1645	0.8146	4.9521	1.2275	1.038	2.650	(0.931P ² +0.1028P+1)/(0.6636P ² +1)
7	1	1.609	1.2348	0.5283	0.4278	1.8925	-	-	(1.584P ² +1.1812P+1)/(0.2791P ² +1)							
	2		1.076							0.2646	0.8051	3.0418	1.2420	0.981	1.346	(1.074P ² +0.2818P+1)/(0.6482P ² +1)
	3		1.034							0.0890	0.8963	10.0704	1.1156	1.019	2.883	(0.962P ² +0.0558P+1)/(0.8033P ² +1)
	4		1.6833							1.6833	1.683P+1)					

A max = 0,1 dB

A min = 40 dB

N	CIRCUIT	K	m	q	q/m	F _∞	F _m	V _m	FONCTION DE TRANSMISSION							
3	1	2.457	1.1925	0.3222	0.2702	3.1030	1.145	1.445	(0.872P ² +0.5065P+1)/(0.1038P ² +1)							
	2		1.5172							(1.517P+1)						
4	1	7.119	4.1823	0.2589	0.0619	3.8613	-	-	(2.233P ² +2.0257P+1)/(0.0670P ² +1)							
	2		1.947							0.5289	0.5764	1.0898	1.7346	1.047	2.347	(0.942P ² +0.2561P+1)/(0.3323P ² +1)
5	1	1.726	1.2045	0.5319	0.4415	1.8799	-	-	(1.564P ² +0.8626P+1)/(0.2629P ² +1)							
	2		1.126							0.2568	0.7618	2.9656	1.3126	1.018	3.033	(0.971P ² +0.1284P+1)/(0.5804P ² +1)
	3		2.1276							2.1276	2.127P+1)					
6	1	6.681	4.8119	0.3167	0.0658	3.1568	-	-	(3.148P ² +2.4249P+1)/(0.1003P ² +1)							
	2		1.201							0.4981	0.7340	1.9038	1.3622	0.917	1.533	(1.255P ² +0.3838P+1)/(0.5388P ² +1)
	3		1.054							0.1272	0.8738	5.8676	1.1443	1.008	3.462	(0.986P ² +0.0641P+1)/(0.7635P ² +1)
7	1	1.692	1.2888	0.5868	0.4553	1.7040	-	-	(1.857P ² +0.9516P+1)/(0.3443P ² +1)							
	2		1.077							0.2235	0.8581	3.8382	1.1652	0.951	1.940	(1.120P ² +0.1799P+1)/(0.7364P ² +1)
	3		1.025							0.0632	0.9352	14.7919	1.0691	1.003	3.703	(0.993P ² +0.0319P+1)/(0.8747P ² +1)
	4		2.3244							2.3244	2.324P+1)					

A max = 0,5 dB

A min = 40 dB

N	CIRCUIT	K	m	q	q/m	F _∞	F _m	V _m	FONCTION DE TRANSMISSION							
3	1	2.330	1.1905	0.3625	0.3045	2.7583	1.052	1.757	(0.994P ² +0.4521P+1)/(0.1314P ² +1)							
	2		1.9094							(1.909P+1)						
4	1	7.563	4.7304	0.2836	0.0599	3.5252	-	-	(2.764P ² +2.0139P+1)/(0.0804P ² +1)							
	2		1.313							0.4993	0.6212	1.2543	1.6095	1.010	2.830	(1.001P ² +0.2108P+1)/(0.3860P ² +1)
5	1	1.729	1.1938	0.5668	0.4747	1.7642	0.830	1.238	(1.674P ² +0.7338P+1)/(0.3212P ² +1)							
	2		1.112							0.2288	0.7975	3.4856	1.2538	1.001	3.504	(1.001P ² +0.0999P+1)/(0.6361P ² +1)
	3		2.5950							2.5950	2.595P+1)					
6	1	7.200	5.3637	0.3375	0.0629	2.9627	-	-	(3.734P ² +2.3567P+1)/(0.1139P ² +1)							
	2		1.198							0.4553	0.7651	1.6805	1.3069	0.898	1.917	(1.282P ² +0.3036P+1)/(0.5854P ² +1)
	3		1.047							0.1083	0.8978	8.2875	1.1138	1.000	4.063	(1.000P ² +0.0475P+1)/(0.8060P ² +1)
7	1	1.704	1.2652	0.6150	0.4861	1.6257	0.773	1.215	(1.934P ² +0.7968P+1)/(0.3783P ² +1)							
	2		1.074							0.1993	0.8804	4.4158	1.1358	0.946	2.384	(1.126P ² +0.1354P+1)/(0.7751P ² +1)
	3		1.021							0.0515	0.9498	18.4146	1.0527	0.999	4.304	(1.000P ² +0.0227P+1)/(0.9022P ² +1)
	4		2.7960							2.7960	2.796P+1)					

A max = 1 dB

A min = 40 dB