

**Dept GEII IUT Bordeaux I**

**FILTRAGE**  
**ANALOGIQUE et NUMERIQUE**  
**(Vol. 8)**

**G. Couturier**

Tel : 05 56 84 57 58

email : [couturier@elec.iuta.u-bordeaux.fr](mailto:couturier@elec.iuta.u-bordeaux.fr)

## Sommaire

I-Introduction	p. 1
II-Filtrage analogique	p. 4
II-1- Filtres passe-bas d'ordre deux	p. 5
II-2- Réalisation d'un filtre passe-bas d'ordre égal à deux	p. 8
II-3- Filtres passe-bas d'ordre supérieur à deux	p. 11
II-4- Synthèse des filtres passe-bas	p. 15
II-5- Filtres passe-haut d'ordre deux	p. 18
II-6- Réalisation d'un filtre passe-haut d'ordre égal à deux	p. 19
II-8- Synthèse des filtres passe-haut	p. 25
II-9- Filtres passe-bande du deuxième ordre	p. 27
II-10- Filtres réjecteurs du deuxième ordre	p. 29
II-11- Filtres universels	p. 32
II-12- Filtres à capacités commutées	p. 36
$\alpha$ ) approche simplifiée du filtre	p. 36
$\beta$ ) traitement complet du filtre à capacités commutées	p. 38
III-Filtrage numérique	p. 42
III-1- Critère de stabilité des filtres numériques	p. 44
III-2- Comportement fréquentiel des filtres numériques	p. 45
III-3- Synthèse des filtres RII	p. 46
$\alpha$ ) la fonction modèle est la réponse en fréquence : transformée bilinéaire	p. 46
$\beta$ ) exemple de calcul d'un filtre par utilisation de la transformée bilinéaire	p. 50
$\gamma$ ) la fonction modèle est la réponse impulsionnelle : invariance impulsionnelle	p. 53
$\epsilon$ ) exemple de calcul d'un filtre par utilisation de l'invariance impulsionnelle	p. 54
III-4- Synthèse des filtres RIF	p. 58
III-5- Implémentation des filtres RII et RIF dans les processeurs de de signaux	p. 68
III-5-1- Implémentation d'un filtre RIF dans un DSP	p. 68
III-5-2- Implémentation d'un filtre RII dans un DSP	p. 69
1) Méthode d'implémentation directe	p. 69
2) Méthode d'implémentation en cascade	p. 71
III-5-3- Performances des filtres	p. 73
annexe I : Les outils de traitement des signaux numériques	p. 77
I- Réponse impulsionnelle d'un système numérique et transformée en Z	p. 77
I- 1- Réponse impulsionnelle	p. 77
I- 2- Produit de convolution	p. 77
I- 3- Transformée en Z	p. 78

II- Réponse harmonique d'un système numérique : fonction de transfert isochrone	p. 80
II- 1- Propriétés de la fonction de transfert isochrone d'un système numérique	p. 80
II- 2- Exemples	p. 81

annexe II : Table des transformées en Z p. 86

annexe III : Calcul de la transformée inverse de  $H(z) = \frac{B + Cz^{-1}}{1 - 2\beta z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}$  p. 87

annexe IV : *Universal Active Filter UAF42 - Burr-Brown* p. 89

annexe V : *MF6 6th Order Switched Capacitor Butterworth Lowpass Filter, National Semiconductor*  
*MF10 Universal Monolithic Dual Switched Capacitor Filter, National Semiconductor* p. 90

## I- Introduction

Dans cette introduction nous allons montrer à partir d'un exemple simple la nécessité de développer des **formes standards** des fonctions de transfert des **filtres analogiques** et de la même manière nous montrerons le besoin d'une **méthodologie** de conception des **filtres numériques**.

Prenons donc le cas simple d'un filtre passe-bas du premier ordre, dont le schéma électrique est représenté ci-dessous :

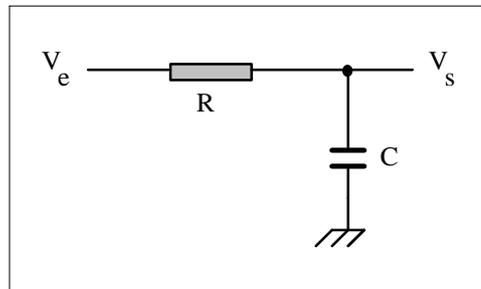


Fig. 1 Filtre analogique passe-bas du premier ordre

Ecrivons l'équation différentielle régissant le fonctionnement de ce filtre, il vient :

$$V_e(t) = V_s(t) + RC \frac{dV_s(t)}{dt} \quad (1)$$

Soient  $V_e(p)$  et  $V_s(p)$  les transformées de Laplace de  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$ , écrivons la fonction de transfert  $H(p) = V_s(p)/V_e(p)$  du filtre, on suppose  $V_s(t=0^-) = V_s(t=0^+) = 0$  :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{1 + RCp} \quad (2)$$

La fonction de transfert  $H(p)$  est ici du premier ordre car l'équation différentielle régissant le circuit est du premier ordre.

Les filtres du premier ordre sont en général peu performants (pente d'atténuation limitée à -20dB/décade). On peut à partir de la simple cellule R-C précédente construire des filtres dont la pente d'atténuation est  $\ll -20$ dB/décade, il suffit par exemple de disposer plusieurs cellules en cascade. L'équation différentielle régissant le fonctionnement d'un tel filtre constitué de N cellules serait de la forme :

$$a_N \frac{d^N V_s(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} V_s(t)}{dt^{N-1}} + \dots + V_s(t) = V_e(t) \quad (3)$$

Soient  $V_e(p)$  et  $V_s(p)$  les transformées de Laplace de  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$ , la fonction de transfert  $H(p)$  du filtre s'écrit :

$$H(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{a_N p^N + a_{N-1} p^{N-1} + \dots + 1} \quad (4)$$

Il est facile de prédire le comportement pour  $f \rightarrow 0$  et  $f \rightarrow \infty$ , en effet :

$$|H(j\omega)| \rightarrow 1 \text{ si } f \rightarrow 0 \text{ et } |H(j\omega)| \rightarrow \frac{1}{a_N \omega^N} \text{ si } f \rightarrow \infty \quad (5)$$

La pente d'atténuation est donc de  $-N \times 20 \text{dB/décade}$ , il s'agit ici d'un filtre passe-bas du  $N^{\text{ième}}$  ordre. Il est par contre plus difficile de prédire le comportement du filtre pour les fréquences intermédiaires, celui-ci dépend des coefficients  $a_j$  ( $j = N, N-1, \dots, 0$ ), remarquons qu'il existe une infinité de filtres passe-bas du  $N^{\text{ième}}$  ordre. Pour faciliter la synthèse des filtres (faire la synthèse c'est chercher la fonction de transfert  $H(p)$  telle que la courbe de réponse en fréquence obéisse à un certain gabarit), on utilisera donc des **fonctions standards**, c'est à dire des fonctions de transfert  $H(p)$  avec des coefficients  $a_j$  choisis tels que  $H(j\omega)$  présente certaines caractéristiques intéressantes.

La réalisation des filtres fait de plus en plus souvent appel aux techniques numériques. Très succinctement, il s'agit d'échantillonner le signal analogique d'entrée  $V_e(t)$ , on dispose donc de  $V_e(t)$  aux instants  $nT_e$ , où  $T_e$  est la période d'échantillonnage, et on fait subir à ces échantillons une transformation mathématique. Prenons le cas par exemple du filtre passe-bas de premier ordre, à l'équation différentielle précédente on fait correspondre une équation aux différences finies de la forme :

$$V_e(nT_e) = V_s(nT_e) + RC \frac{V_s(nT_e) - V_s((n-1)T_e)}{T_e} \quad (6)$$

On obtient alors la relation de récurrence suivante permettant de calculer le  $n^{\text{ième}}$  terme de  $V_s$  connaissant le  $(n-1)^{\text{ième}}$  terme et le  $n^{\text{ième}}$  terme de  $V_e$ .

$$V_s(nT_e) = \left[ \frac{RC}{T_e + RC} \right] V_s((n-1)T_e) + \left[ \frac{T_e}{T_e + RC} \right] V_e(nT_e) \quad (7)$$

Un filtre numérique, c'est d'abord un algorithme de calcul. On peut bien entendu restituer un signal analogique  $V_s'(t)$  à partir des échantillons  $V_s(nT_e)$  en effectuant par exemple la convolution par un bloqueur d'ordre zéro de réponse impulsionnelle  $h(t) = [U_e(t) - U_e(t - T_e)]$ , le signal de sortie est alors noté volontairement  $V_s'(t)$  pour le distinguer du signal  $V_s(t)$  correspondant à l'opération de filtrage analogique. Nous étudierons par la suite les différences entre ces deux signaux.

Ici encore l'intérêt des filtres du premier ordre est limité ; il nous faut donc établir des relations de récurrence correspondant à des filtres d'ordre  $N$ . Comme précédemment, il est à priori possible de partir de l'équation différentielle d'ordre  $N$  et d'écrire l'équation aux différences finies correspondante. On voit tout de suite la "lourdeur" de cette démarche. En effet, écrire par exemple la dérivée d'ordre 4 sous forme de différences finies relève presque des "travaux d'Hercule" !... . Il nous faut donc développer une **méthodologie** simple permettant d'obtenir rapidement les **fonctions de récurrence** des filtres numériques.

Les coefficients des filtres sont en général calculés par utilisation de **fonctions modèles**. Les fonctions modèles utilisées pour la synthèse des filtres sont soit la **réponse impulsionnelle** soit la **réponse en fréquence** de filtres analogiques connus.

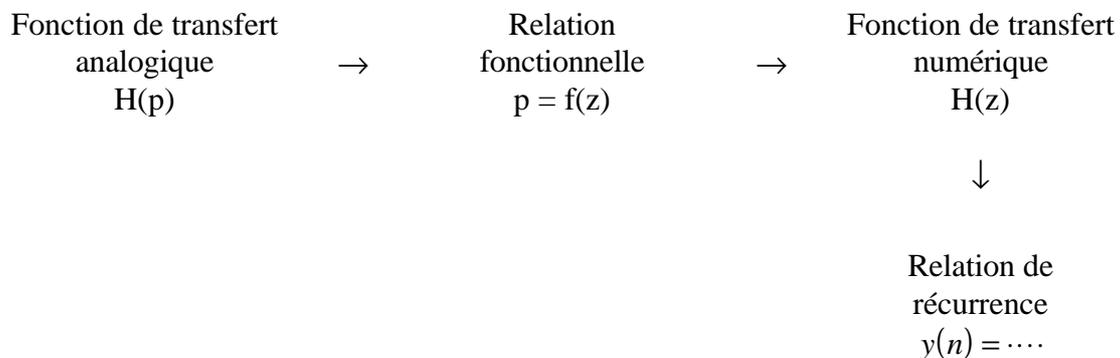
Dans le cas d'une fonction modèle de type réponse impulsionnelle, les éléments  $h(k)$  de la réponse impulsionnelle numérique sont obtenus en calculant  $h(t)$ , la réponse

impulsionnelle du filtre analogique, aux instants  $t=kT_e$ . La fonction de transfert en Z du filtre s'écrit donc :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k} \quad (8)$$

Si la fonction de transfert  $H(z)$  est connue, alors il est facile d'écrire l'équation de récurrence.

En général, on privilégie la réponse en fréquence plutôt que la réponse impulsionnelle, dans ce cas la fonction modèle utilisée est la réponse en fréquence d'un filtre analogique connu. La procédure est alors la suivante : connaissant la fonction de transfert analogique  $H(p)$  (ou  $H(j\omega)$ ) on cherche une relation fonctionnelle  $p = f(z)$  telle que la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  du filtre numérique soit la plus proche possible de  $H(j\omega)$  ; rappelons que  $T_n(j\omega)$  est égal  $H(z)$  calculé pour  $z = \exp(j\omega T_e)$ .



Cette démarche nécessite d'une part de connaître les **filtres analogiques** et d'autre part de trouver une **relation fonctionnelle**  $p = f(z)$ .

Les filtres numériques, dont nous venons de parler conduisent à des relations de récurrence, c'est à dire que l'échantillon  $V_s(nT_e)$  est obtenu à partir de  $V_s((n-1)T_e)$  et dans le cas plus général à partir des échantillons  $V_s((n-j)T_e)$ , avec  $j = 1, 2, \dots$  etc. Finalement l'échantillon  $V_s(nT_e)$  dépend de toute l'histoire du signal  $V_e(t)$ , ou plutôt des  $V_e(nT_e)$ . C'est également vrai dans le cas des filtres analogiques, autrement dit ces filtres ont des **réponses impulsionnelles infinies**. Les filtres numériques ainsi réalisés sont classés dans la catégorie des **filtres RII** ou **IIR** (Réponse Impulsionnelle Infinie ou Infinite Impulse Response), ou encore **filtres récursifs**.

Les techniques numériques permettent cependant de réaliser des filtres non récursifs. En effet, on peut réaliser des filtres dont l'échantillon  $V_s(nT_e)$  est simplement calculé à partir d'un nombre fini d'échantillons  $V_e(jT_e)$  avec  $j = n, n-1, \dots, M$ . Ces filtres ont donc des **réponses impulsionnelles finies**, ils sont classés dans la catégorie des **filtres RIF** ou **FIR** (Réponse Impulsionnelle Finie ou Finite Impulse Response).

Les coefficients des filtres RIF peuvent être calculés par troncature de la réponse impulsionnelle d'un filtre idéal. Les filtres RIF ont l'avantage d'être toujours stables, par contre ils nécessitent un grand nombre de coefficients ce qui augmente le temps de calcul et la place en mémoire.

## II- Filtrage analogique

On distingue cinq types de filtres :

- filtre passe-bas
- filtre passe-haut
- filtre passe-bande
- filtre réjecteur
- filtre déphaseur pur (gain constant q.q.s. la fréquence et phase dépendant de la fréquence).

Un filtre analogique est caractérisé par sa fonction de transfert  $H(p)$  ; le gain complexe  $H(j\omega)$  est obtenu en faisant  $p=j\omega$  dans  $H(p)$ . D'une manière générale  $H(p)$  se présente sous la forme :

$$H(p) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i p^i}{\sum_{j=0}^N b_j p^j} \quad \text{avec } M \leq N \quad (9)$$

L'ordre d'un filtre est donné par le degré du polynôme du dénominateur, c'est à dire  $N$ . C'est le degré de l'équation différentielle régissant le fonctionnement du filtre (voir par exemple équations (3) et (4) ci-dessus). L'ordre du filtre définit le comportement asymptotique quand  $\omega$  tend vers zéro ou l'infini. Par exemple, pour un filtre passe-bas d'ordre 4, la pente de  $20 \text{Log}_{10} |H(j\omega)|$  en fonction de  $\text{Log}_{10} \omega$  sera de  $-80 \text{dB/décade}$  quand  $\omega \rightarrow \infty$ . L'ordre d'un filtre est donc une caractéristique importante. Les filtres d'ordre deux et d'ordre un occupent une place de toute première importance, en effet un filtre d'ordre  $N$  quelconque peut être réalisé à partir d'un ensemble de filtres d'ordre **deux** et **un** si nécessaire.

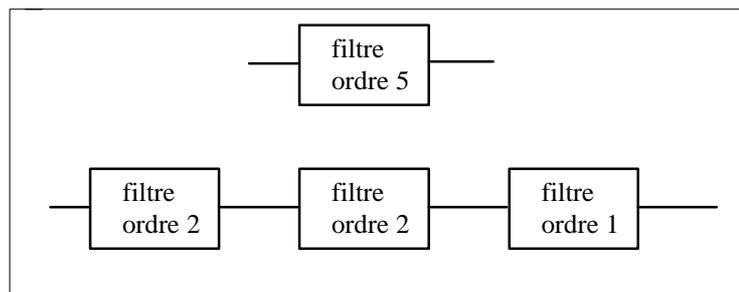


Fig. 2 Réalisation d'un filtre d'ordre 5

Les filtres d'ordre un ne présentent pas de difficulté. Leur fonction de transfert est soit  $H(p) = 1/(1 + tp)$  pour un filtre passe-bas, soit  $H(p) = tp/(1 + tp)$  pour un filtre passe-haut avec  $\tau$  réel.

On peut se poser la question de l'intérêt des filtres d'ordre deux, en effet il est à priori possible de réaliser un filtre d'ordre deux à partir de deux filtres d'ordre un. La mise en cascade de deux filtres d'ordre un constitue bien un filtre d'ordre deux, elle ne permet pas toutefois de réaliser tous les filtres d'ordre deux, en effet les pôles de  $H(p)$  sont dans ce cas toujours réels. En conséquence nombre de filtres d'ordre deux ne sont pas réalisables par la mise en cascade de deux filtres d'ordre un.

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux filtres d'ordre deux de type passe-bas. Les filtres passe-bas sont de toute première importance, d'une part parce qu'ils sont très utilisés et d'autre part parce que la synthèse des autres filtres est grandement facilitée par la connaissance des fonctions de transfert des filtres passe-bas (voir suite du cours).

## II-1- Filtres passe-bas d'ordre deux

La fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre deux est donc de la forme :

$$H(p) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} \quad (10)$$

A cette forme, on préfère la forme canonique suivante :

$$H(p) = A_{LP} \frac{\omega_0^2}{p^2 + p\omega_0/Q + \omega_0^2} \quad (11)$$

dans laquelle  $A_{LP}$  est le gain aux basses fréquences, en effet  $|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = A_{LP}$ ,  $\omega_0$  est la fréquence caractéristique et  $Q$  est appelé coefficient de surtension, la justification de ces deux grandeurs apparaîtra clairement par la suite.

Le module de  $H(j\omega)$  est donné par :

$$|H(j\omega)| = A_{LP} \frac{1}{\left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}\right)^2 \right]^{1/2}} \quad (12)$$

Une étude rapide de  $|H(j\omega)|$  en fonction de  $\omega$  montre que  $|H(j\omega)|$  présentera un maximum si  $Q > 1/\sqrt{2}$  ; en effet  $\frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} = 0$  implique que  $2\omega^2 = \omega_0^2(2 - 1/Q^2)$ .

Dans le cas où  $Q > 0.707$ , il est facile de montrer que :

$$|H(j\omega)|_{\omega = \omega_0(1-1/2Q^2)^{1/2}} = \frac{A_{LP}}{\left[ \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q^4} \right]^{1/2}} \approx QA_{LP} \quad \text{si } Q \gg 1 \quad (13)$$

c'est la raison pour laquelle  $Q$  est appelé coefficient de surtension.

Pour une même valeur du coefficient  $Q$ , les tracés  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$  fonction de  $\log_{10} \omega$  se déduisent les uns des autres par une simple translation, avec ce système d'axe il existe donc une infinité de tracés suivant la valeur de la pulsation caractéristique  $\omega_0$ . Il est possible de ramener tous les tracés ayant une même valeur de  $Q$  à un tracé unique à condition de prendre comme axe des  $x$  non plus  $\log_{10} \omega$  mais  $\log_{10}(\omega/\omega_0)$ .

L'allure de  $20\log_{10}|H(j\omega)|$  en fonction de  $\log_{10}(\omega/\omega_0)$  est représenté ci-dessous pour trois valeurs différentes du coefficient Q ( $Q=0.707$ ,  $Q<0.707$  et  $Q>0.707$ ).

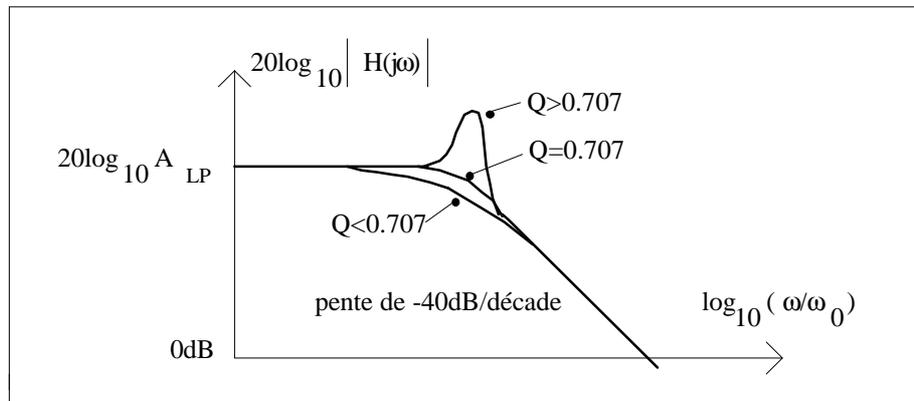


Fig. 3 Courbes de gain pour  $Q=0.707$ ,  $Q<0.707$  et  $Q>0.707$

A l'écriture de l'équation (11) on préfère une écriture en variable réduite, à cet effet on pose  $s=p/\omega_0$ , dans ce cas l'équation (11) s'écrit :

$$H(p) \rightarrow H(s) = A_{LP} \frac{1}{s^2 + s/Q + 1} \quad (14)$$

La fonction de transfert (14) est appelée **fonction de transfert normalisée**.  
Suivant la valeur de Q les filtres portent des noms différents, on distingue :

- a)  $Q=0.707 \rightarrow$  Butterworth
- b)  $Q=0.577 \rightarrow$  Bessel
- c)  $Q=0.863 \rightarrow$  Chebyshev (ripple band = 0.5dB)
- $Q=1.128 \rightarrow$  Chebyshev (ripple band = 2dB)

$\Rightarrow$  Les filtres de Butterworth ont les courbes de réponse les plus plates dans la bande passante (pas de rebond), ce sont les filtres les plus utilisés. Dans la suite du cours, nous ne présenterons la synthèse des filtres uniquement à partir des filtres de Butterworth. Dans le cas des filtres de Butterworth, la pulsation caractéristique  $\omega_0$  est égale à la pulsation de coupure à -3dB. En effet compte tenu de la relation (12), le module de  $H(j\omega_0)$  est égal à  $A_{LP} / \sqrt{2}$  pour  $\omega=\omega_0$  si  $Q = 1/\sqrt{2}$ .

$\Rightarrow$  Les filtres de Chebyshev présentent une pente d'atténuation (roll-off) supérieur à 40dB/décade au voisinage de la fréquence de coupure. Les filtres de Chebyshev sont caractérisés par une ondulation dans la bande passante (**ripple band**), voir la définition sur le graphe de la Fig. 4.

Les filtres de Chebyshev sont caractérisés par la valeur de Q et la pulsation  $\omega_{0dB}$  ; c'est la pulsation pour laquelle le gain est de nouveau égal à  $A_{LP}$ , c'est à dire le gain à la fréquence nulle. Pour un filtre de ripple band=0.5dB, on a la relation :  $\omega_0 = 1.231\omega_{0dB}$ , pour un ripple band=2dB :  $\omega_0 = 0.907\omega_{0dB}$ .

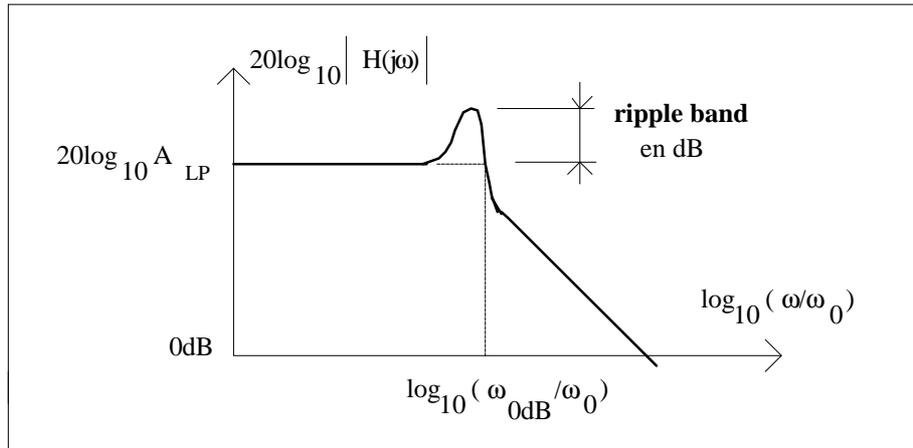


Fig. 4 Filtre passe-bas de Chebyshev d'ordre deux

⇒ Dans le cas des filtres de Bessel, la pulsation de coupure à -3dB est reliée à la pulsation caractéristique  $\omega_0$  par la relation :  $\omega_0 = 1.274\omega_{-3dB}$ . L'intérêt des filtres de Bessel réside dans la **phase linéaire** aux basses fréquences. Trop souvent, on oublie la phase  $\varphi(\omega)$  des filtres, or sa variation avec la fréquence est un élément important dans une opération de filtrage, pour s'en convaincre prenons le cas d'un signal constitué de trois sinusoïdes :  $e(t) = A \sin(\omega_1 t) + B \sin(\omega_2 t) + C \sin(\omega_3 t)$ . Le filtre est conçu par exemple pour éliminer la pulsation  $\omega_3 > \omega_1, \omega_2$  ; le signal espéré en sortie du filtre est donc :  $s_{th}(t) = A \sin(\omega_1 t) + B \sin(\omega_2 t)$ . Supposons que le gain du filtre est voisin de l'unité pour les deux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et pratiquement nul pour  $\omega_3$ . Soient  $\varphi(\omega_1)$  et  $\varphi(\omega_2)$  les phases respectives pour les deux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Le signal  $s(t)$  après filtrage s'écrit donc :

$$s(t) = A \sin(\omega_1 t + \mathbf{j}(\omega_1)) + B \sin(\omega_2 t + \mathbf{j}(\omega_2))$$

Le signal après filtrage est déformé, sauf si la phase  $\mathbf{j}(\omega) = \arctg(H(j\omega))$  du filtre varie linéairement avec la fréquence, en effet dans ce cas on peut écrire  $\varphi(\omega) = k\omega$  par exemple, et le signal  $s(t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} s(t) &= A \sin(\omega_1 t + k\omega_1) + B \sin(\omega_2 t + k\omega_2) \\ &= A \sin(\omega_1(t + k)) + B \sin(\omega_2(t + k)) \\ &= s_{th}(t + k) \end{aligned}$$

En conclusion, si la phase  $\varphi(\omega)$  varie linéairement en fonction de la fréquence, le signal est simplement **translaté mais non déformé**. Pour quantifier la dépendance de  $\varphi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ , on introduit le **retard de groupe**  $\tau = \frac{d\varphi}{d\omega}$  (group delay) ; un filtre à **phase linéaire** a donc un **retard de groupe constant**. En pratique, on ne peut pas réaliser un filtre analogique à phase linéaire, le filtre de Bessel est celui dont la phase varie la plus linéairement en fonction de la fréquence dans la bande passante.

**NB** : Le filtre passe-bas idéal serait celui dont la réponse en fréquence aurait l'allure suivante (gain unité dans la bande passante et phase nulle) :

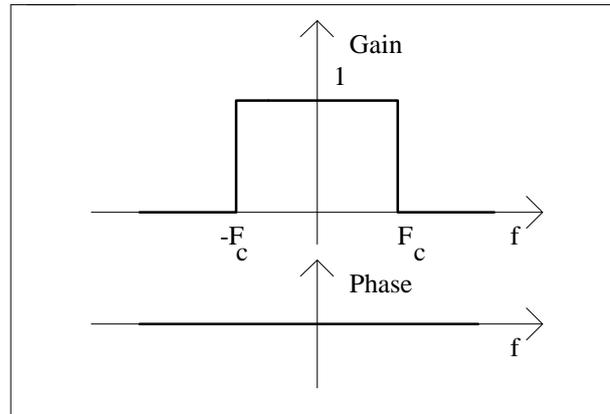


Fig. 5 Passe bas idéal

La réponse impulsionnelle d'un tel filtre est donnée par la transformée de Fourier inverse de  $H(f)$ , avec  $H(f) = 1$  pour  $-F_c < f < F_c$  et  $H(f) = 0$  ailleurs d'où :

$$h(t) = \int_{-F_c}^{F_c} e^{j2\pi ft} df = \frac{\sin(2\pi F_c t)}{\pi t}$$

Il est clair qu'un tel filtre est irréalisable, en effet il s'agit d'un filtre non causal (la sortie précède l'entrée).

Nous verrons dans la suite du cours qu'il est possible de réaliser des filtres numériques RIF à phase linéaire.

## II-12- Filtres à capacités commutées

Dans les filtres universels la pulsation caractéristique  $\omega_0$  est fonction des constantes de temps  $\tau_1$  et  $\tau_2$  des deux intégrateurs. La modification de  $\omega_0$  n'est donc pas très aisée. Les filtres à capacités commutées offrent une alternative à ce problème, en effet dans ces filtres la pulsation  $\omega_0$  est fixée par la fréquence  $f_e$  d'un signal logique.

Le schéma électrique de base d'un filtre à capacités commutées, ici un intégrateur, est donné à la Fig. 16.

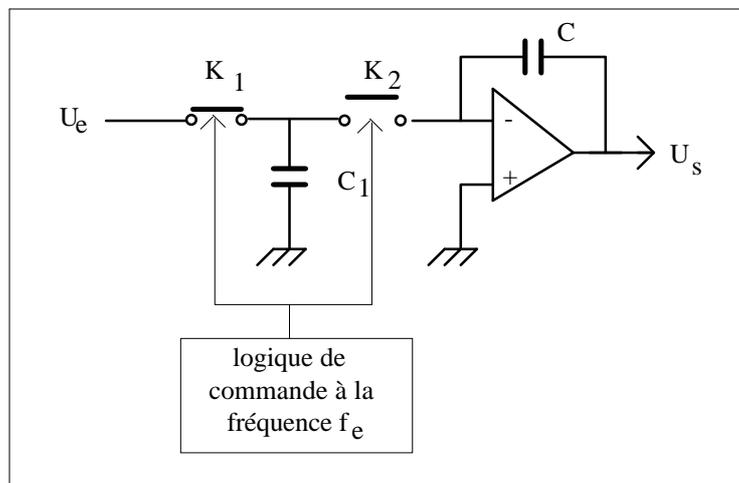


Fig. 16 Schéma de base d'un filtre à capacités commutées (intégrateur)

Les interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  (MOSFET en commutation) sont fermés ou ouverts en synchronisme avec un signal logique de fréquence  $f_e$ , suivant le chronogramme de la Fig. 17.

Au niveau logique '1' le condensateur  $C_1$  suit le signal d'entrée  $U_e$ . A l'instant  $nT_e^-$  par exemple la tension aux bornes de  $C_1$  est égale à  $U_e(nT_e)$ . A l'instant  $nT_e^+$ , c'est à dire au niveau logique '0' la charge du condensateur  $C_1$  est transférée intégralement au condensateur  $C$ . Cette opération s'effectue en un temps nul si on néglige la résistance des interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$ . La tension aux bornes de  $C$  restera constante jusqu'à l'instant  $(n+1)T_e$ , (en pratique  $C$  se déchargera très faiblement, d'une part à cause du courant de polarisation de l'amplificateur opérationnel et d'autre part à cause de la conductivité électronique du matériau constituant le diélectrique du condensateur, ces deux quantités restent cependant très faibles).

Pour déterminer le comportement du filtre en fréquence, l'utilisation de la transformée en  $Z$  s'impose. Dans une première approche nous faisons cependant un raisonnement simplifié sans introduire cet outil mathématique.

### $\alpha$ ) Approche simplifiée du filtre

Nous allons montrer que le filtre se comporte comme un intégrateur de constante de temps  $\tau = R_{eq}C$  avec  $R_{eq} = 1/C_1 f_e = T_e/C_1$ . A cet effet, supposons un signal d'entrée  $U_e = AU(t)$  avec  $U(t)$  la fonction échelon. Le signal de sortie  $U_s$  est constitué de marches d'égale amplitude

comme le montre la Fig. 18. En écrivant la conservation de la charge, on obtient une hauteur de marche de  $\frac{C_1 A}{C}$ .

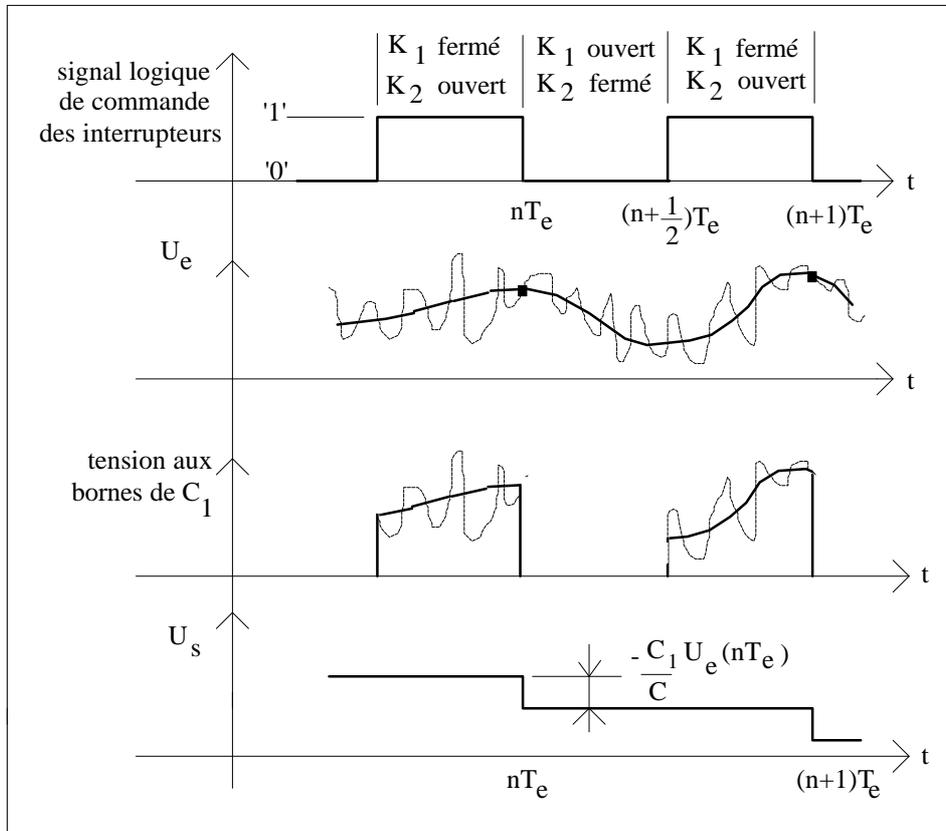


Fig. 17 Principaux signaux du schéma de la Fig. 16

Quelle devrait être la valeur de  $R_{eq}$  du schéma (b) de la Fig. 19 pour que la droite  $\Delta$  passe par les sommets des marches ? La droite  $\Delta$  a pour équation :

$$-\frac{1}{C} \frac{A}{R_{eq}} t$$

L'accroissement en valeur absolue de  $U_s'(t)$  (droite  $\Delta$ ) pendant une durée  $T_e$  est donc égal à :  $\frac{1}{C} \frac{A}{R_{eq}} T_e$ . En comparant cette valeur à la hauteur d'une marche  $\frac{C_1 A}{C}$ , on obtient :

$$R_{eq} = T_e / C_1$$

On peut conclure que les schémas (a) et (b) sont des **intégrateurs** de fonction de transfert  $H(p) = -\frac{1}{\tau p}$  avec  $\tau = R_{eq} C = \frac{T_e}{C_1} C$ . Il est clair que le signal  $U_s(t)$  sera d'autant plus proche du signal  $U_s'(t)$  que les marches seront petites donc que la fréquence  $f_e$  sera élevée.

Pour étudier plus en détail le comportement du filtre, par exemple sa réponse harmonique, il faut faire usage de la transformée en Z.

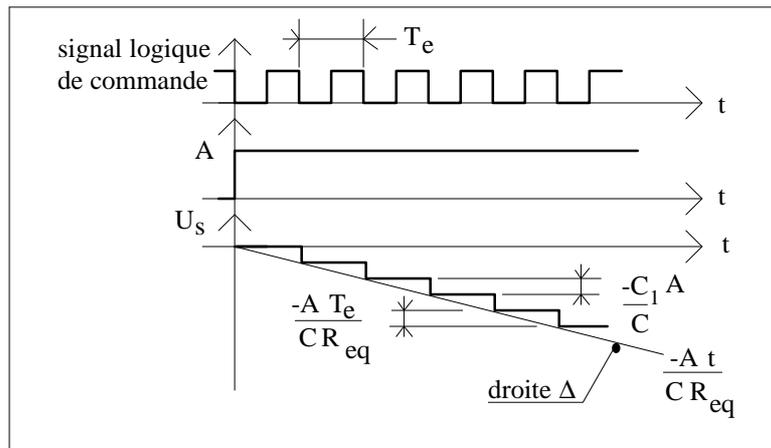


Fig. 18 Réponse du filtre à capacités commutées à un échelon de tension

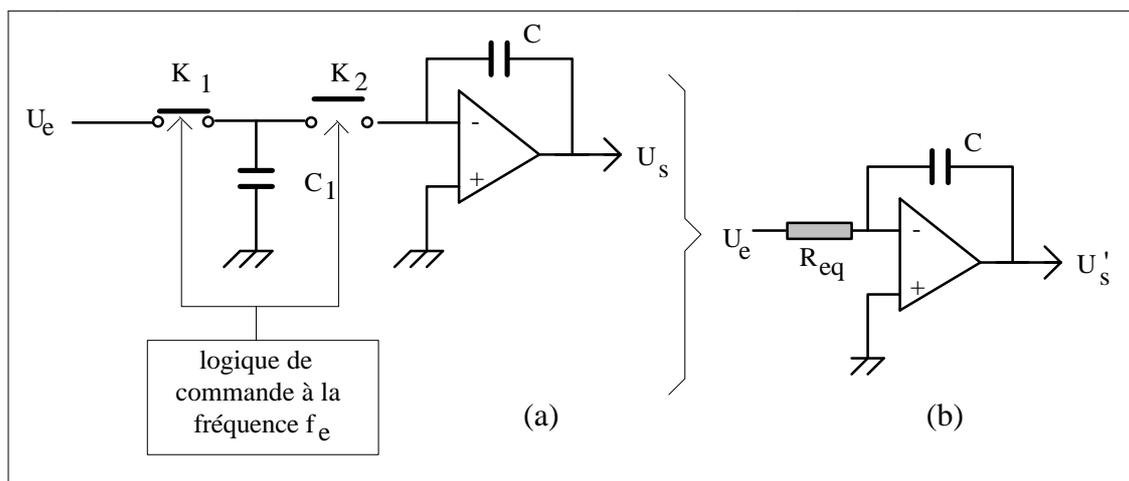


Fig. 19 Equivalence entre filtres à capacités commutées et filtre analogique

### β) Traitement complet du filtre à capacités commutées

Il est à noter que le signal de sortie  $U_s$  serait inchangé même en présence d'un signal  $U_e$  tel que celui représenté en pointillés à la Fig. 17.

Le filtre de la Fig. 16 réalise en fait trois opérations distinctes comme le montre la Fig. 20, on distingue :

- 1) un échantillonnage : les échantillons  $U_e(n)$  sont obtenus par échantillonnage du signal  $U_e(t)$  à la fréquence  $f_e$
- 2) un traitement numérique des échantillons  $U_e(n)$  : à la suite des échantillons  $U_e(n)$  on fait correspondre la nouvelle suite des échantillons  $U_s(n)$  :

$$U_s(n) = U_s(n-1) - \frac{C_1 U_e(n)}{C} \quad (40)$$

L'équation (40) traduit seulement la conservation de la charge.

3) une reconstruction analogique par un bloqueur d'ordre zéro

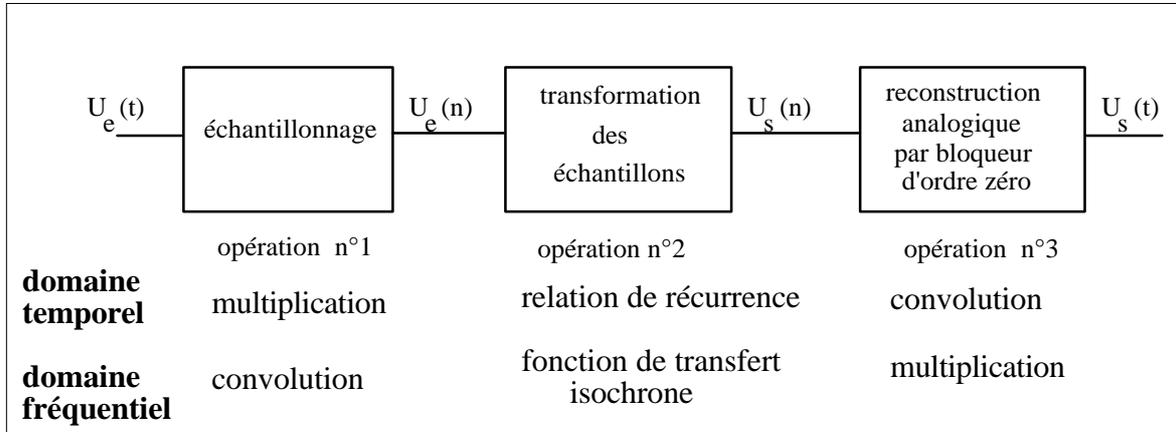


Fig. 20 Différentes opérations réalisées par le filtre de la Fig. 16

Pour étudier la réponse harmonique du filtre, supposons une entrée de la forme cosinusoidale  $U_e(t) = A \cos(\omega_0 t)$  et cherchons à déterminer  $U_s(t)$  et son spectre.

La transformée de Fourier de  $U_e(t)$  s'écrit (*au sens des distributions*) :

$$T.F.[U_e(t)] = \frac{A}{2} \{ \mathbf{d}(f - f_0) + \mathbf{d}(f + f_0) \}$$

Elle est constituée de deux raies d'amplitude  $A/2$  situées aux fréquences  $-f_0$  et  $f_0$  comme le montre la Fig. 21-a.

Les échantillons  $U_e(n)$  sont obtenus par échantillonnage, c'est à dire multiplication (*au sens des distributions*) par le peigne de Dirac :

$$U_e(n) = U_e(t) \sum_k \mathbf{d}(t - kT_e) \Rightarrow T.F.[U_e(n)] = T.F.[U_e(t)] \otimes T.F. \left[ \sum_n \mathbf{d}(t - kT_e) \right]$$

$$T.F.[U_e(n)] = \frac{A}{2} \{ \mathbf{d}(f - f_0) + \mathbf{d}(f + f_0) \} \otimes \frac{1}{T_e} \sum_k \mathbf{d}(f - kf_e) = \frac{A}{2T_e} \sum_k \{ \mathbf{d}(f + f_0 - kf_e) + \mathbf{d}(f - f_0 - kf_e) \}$$

Il s'agit d'un spectre de raies d'amplitude  $A/2T_e$  situées aux fréquences  $\dots -f_e - f_0, -f_e + f_0, -f_0, f_0, f_e - f_0, f_e + f_0, \dots$  comme le montre la Fig. 21-b.

Chaque composante de fréquence précédente est multipliée par la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  de l'opération n°2.  $T_n(j\omega)$  est obtenue en calculant  $H(z)$  pour  $z = e^{j\omega T_e}$ , avec  $H(z)$  la fonction de transfert en Z déduite de l'équation de récurrence (40). D'après (40), on obtient respectivement pour  $H(z)$  et  $T_n(j\omega)$  :

$$H(z) = -\frac{C}{C_1} \frac{1}{(1-z^{-1})} \Rightarrow T_n(j\omega) = -\frac{C}{C_1} \frac{1}{(1-e^{-j\omega T_e})}$$

La transformée de Fourier des échantillons  $U_s(n)$  est encore constituée de raies situées aux fréquences  $\dots -f_e - f_0, -f_e + f_0, -f_0, f_0, f_e - f_0, f_e + f_0, \dots$ . L'amplitude complexe d'une raie est obtenue en multipliant  $A/2T_e$  par le gain  $T_n(j\omega)$  calculé à la fréquence correspondante. Du fait de la périodicité de  $T_n(j\omega)$ , on notera que  $|T_n(j\omega)|$  est le même pour toutes les raies, voir la Fig. 21-c.

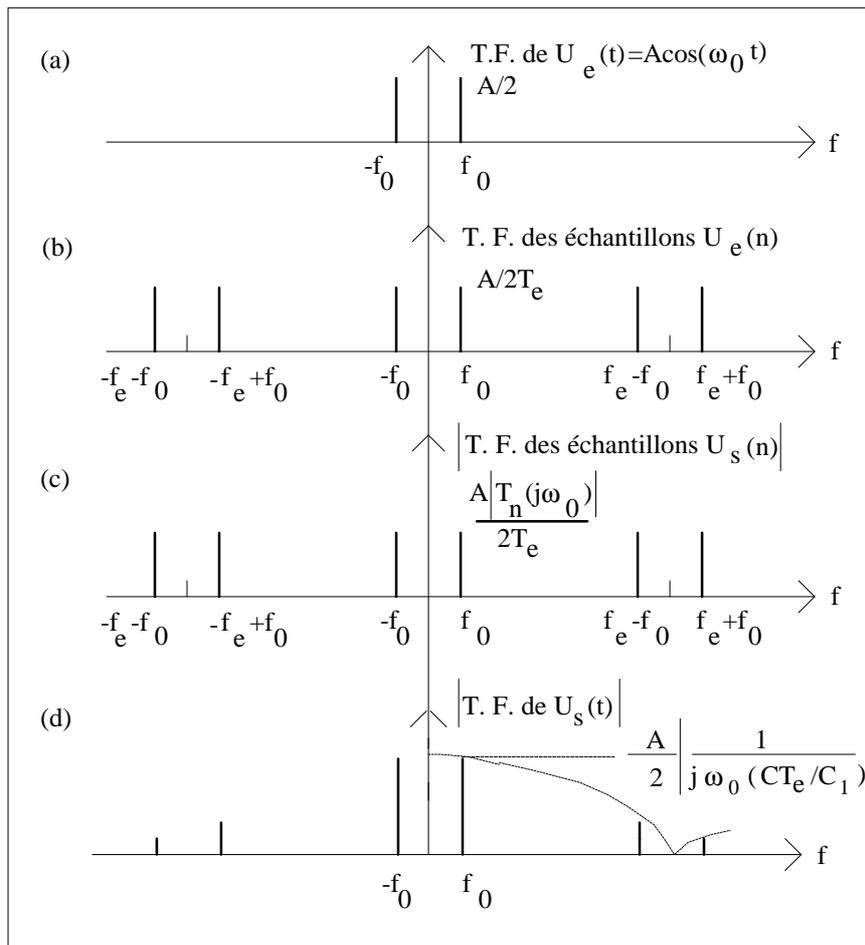


Fig. 21 Spectres des différents signaux de la Fig. 20

Le signal de sortie  $U_s(t)$  est le résultat de la convolution des échantillons  $U_s(n)$  par un bloqueur d'ordre zéro de réponse impulsionnelle  $h(t) = U(t) - U(t - T_e)$ . La transformée de Fourier de  $U_s(t)$  est donc obtenue en effectuant le produit : T.F. $[U_s(n)] \times H(j\omega)$ , avec  $H(j\omega) = \text{T.F.}[h(t)] = \left[ \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} \right]$ . Le spectre de  $U_s(t)$  est encore constitué de raies situées en  $\dots -f_e - f_0, -f_e + f_0, -f_0, f_0, f_e - f_0, f_e + f_0, \dots$ , comme le montre la Fig. 21-d.

L'amplitude complexe d'une raie de fréquence  $f$  est donnée par :

$$-\frac{A}{2T_e} \frac{C_1}{C} \frac{1}{(1 - e^{-j\omega T_e})} \frac{(1 - e^{-j\omega T_e})}{j\omega} = -\frac{A}{2T_e} \frac{C_1}{C} \frac{1}{j\omega} = -\frac{A}{2} \frac{1}{j2\pi f \left[ T_e \frac{C}{C_1} \right]}$$

avec  $f = [ \dots -f_e - f_0, -f_e + f_0, -f_0, f_0, f_e - f_0, f_e + f_0, \dots ]$ .

On retrouve le résultat obtenu en  $\alpha$ ) : le filtre se comporte comme un intégrateur de constante de temps  $T_e C / C_1$ . La sortie  $U_s(t)$  du filtre sera d'autant plus proche d'une cosinusoïde que la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  sera grande devant la fréquence de travail  $f_0$ .

Si par exemple, on impose que la raie située en  $f_e - f_0$  soit inférieure à 1% à la raie principale située en  $f_0$  ; il faut satisfaire l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2\pi(f_e - f_0) \frac{T_e C}{C_1}} < \frac{1}{100} \frac{1}{2\pi f_0 \frac{T_e C}{C_1}} \quad \text{d'où} \quad f_e \geq 100f_0$$

En pratique il est conseillé de travailler avec  $f_e > 50f_0$ .

**NB** : On pourra consulter, en annexe V, les caractéristiques techniques des filtres à capacités commutés MF6 et MF10 de *National semiconductor*.

### III- Filtrage numérique

Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui fait correspondre à une suite d'échantillons  $x(n)$  une autre suite d'échantillons  $y(n)$ . Dans le cas le plus général l'échantillon  $y(n)$  s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i) + \sum_{j=1}^N a_j y(n-j) \quad (41)$$

C'est une généralisation du bloc numérique du filtre à capacités commutées, où la relation de récurrence s'écrivait :

$$y(n) = y(n-1) - \frac{C_1}{C} x(n) \quad (a_1 = 1 \text{ et } a_i = 0 \text{ pour } i > 1 ; b_0 = -C_1/C \text{ et } b_i = 0 \text{ pour } i > 0)$$

A partir de la relation (41) on peut distinguer deux types de filtres :

α) les filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou FIR (Finite Impulse Response). Dans ces filtres tous les coefficients  $a_j$  sont nuls, on obtient donc :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i) \quad (42)$$

L'échantillon  $y(n)$  ne dépend donc que d'un nombre limité d'échantillons. La fonction de transfert  $H(z)$  s'écrit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{i=M} b_i z^{-i} \quad (43)$$

La transformée  $H(z)$  est aussi la transformée en Z de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  ;  $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)z^{-k}$ . Il s'ensuit que  $b_i = h(i)$ , les coefficients  $h(k)$  sont donc nuls pour  $k > M$ , c'est la raison pour laquelle ces filtres sont appelés filtres à réponse impulsionnelle finie. Ce sont des filtres toujours stables car la sortie revient toujours à zéro après suppression de l'excitation.

Exemple de filtre RIF :

Soit le filtre obéissant à la relation suivante :  $y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$ , seuls les deux premiers coefficients  $b_0$  et  $b_1$  sont différents de zéro. La réponse impulsionnelle de ce filtre est représentée ci-dessous.

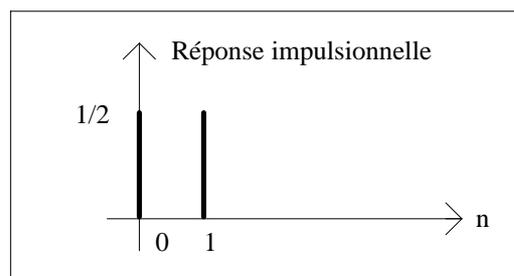


Fig. 22 Réponse impulsionnelle du filtre  $y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$

β) Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou IIR (Infinite Impulse Response), ces filtres sont encore appelés filtres récursifs. Dans ces filtres les coefficients  $a_j$  sont différents de zéro, en conséquence un échantillon  $y(n)$  dépend de tous les échantillons  $x(n)$  passés. La transformée  $H(z)$  de ces filtres s'écrit :

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \right) z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^N a_j y(n-j) \right) z^{-n}$$

$$= \sum_{i=0}^M b_i \left( \sum_{n=0}^{\infty} x(n-i) z^{-n} \right) + \sum_{j=1}^N a_j \left( \sum_{n=0}^{\infty} y(n-j) z^{-n} \right)$$

En effectuant les changements de variables  $(n-i)=u$  et  $(n-j)=v$ , on obtient :

$$Y(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z) + \sum_{j=1}^N a_j z^{-j} Y(z) = X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} + Y(z) \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}$$

d'où la fonction de transfert  $H(z)$  suivante :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}} \quad (44)$$

La réponse impulsionnelle de ces filtres est donc infinie, en conséquence ces filtres peuvent devenir instables.

Exemple de filtre RII :

Soit le filtre obéissant à la relation suivante :  $y(n) = \frac{x(n) + y(n-1)}{2}$ . La transformée en

$Z$  de ce filtre s'écrit :  $H(z) = \frac{1}{2-z^{-1}}$ . La transformée en  $z$  inverse permet de déterminer

l'élément  $h(n)$  de la réponse impulsionnelle :  $h(n) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n$ . Il s'agit bien d'une réponse impulsionnelle infinie, le système est stable, en effet  $h(n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . La réponse impulsionnelle du filtre est donné ci-dessous.

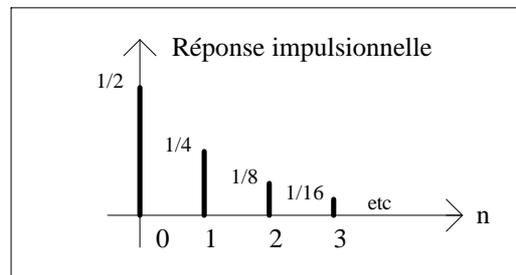


Fig. 23 Réponse impulsionnelle du filtre  $y(n) = \frac{x(n) + y(n-1)}{2}$

### III-1- Critère de stabilité des filtres numériques

Comme pour les systèmes analogiques la stabilité des systèmes numériques peut être déduite du lieu des pôles dans le plan complexe des  $z$ .

Soit donc  $H(z)$  la transformée en  $z$  d'un système numérique, la décomposition en éléments simples de l'expression (44) conduit soit à des termes de la forme :

$$\alpha) \frac{A}{(1 - az^{-1})} \text{ pour un pôle situé en } z=a$$

soit à des termes :

$$\beta) \frac{B + Cz^{-1}}{(1 - 2bz^{-1} + a^2z^{-2})} \text{ pour des pôles imaginaires conjugués situés en}$$

$$z_{1,2} = \beta \pm j\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \text{ avec } |z_{1,2}| = \alpha.$$

Les transformées inverses des ces deux expressions sont respectivement (voir annexes II et III) :

$$\frac{A}{(1 - az^{-1})} \rightarrow Aa^n U(n) \text{ avec } U(n) \text{ la séquence échelon}$$

$$\frac{B + Cz^{-1}}{(1 - 2bz^{-1} + a^2z^{-2})} \rightarrow B[a^n \{\cos(n\omega T) + K \sin(n\omega T)\}]U(n) \text{ avec } \cos(\omega T) = \beta / \alpha$$

$$\text{et } K = \frac{(C/B) + b}{a \sin(\omega T)}.$$

Ces deux suites convergent à condition que  $a$  et  $\alpha$  soient inférieurs à l'unité. En conséquence le critère de stabilité des systèmes numériques peut s'énoncer comme suit :

**Un système numérique est stable si le module des pôles reste inférieur à l'unité.**

Dans le plan complexe des  $z$  le lieu des pôles d'un système stable est donc le cercle de rayon unité.

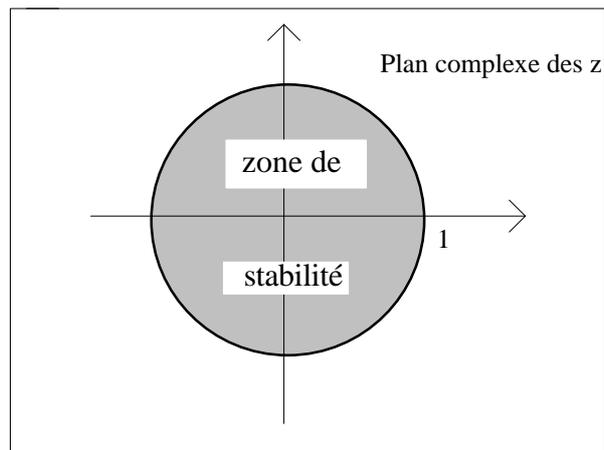


Fig. 24 Plan complexe des Z et lieu des pôles d'un système stable

Pour illustrer le critère de stabilité, nous étudions trois filtres numériques simples, un filtre RIF et deux filtres RII dont un est instable.

Exemple n°1 :

Soit le filtre RIF obéissant à la relation  $y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2}$ , ce filtre a pour transformée en Z ;  $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2}$ .  $H(z)$  présente donc un pôle en  $z=0$ , le système est donc stable. Seuls les deux premiers éléments de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  sont différents de zéro ;  $h(0)=h(1)=1/2$ ,  $h(i)=0$  pour  $i \geq 2$ .

Exemple n° 2 :

Soit le filtre RII obéissant à l'équation récurrente  $y(n) = \frac{x(n) + y(n-1)}{2}$ , ce filtre a pour transformée en Z ;  $H(z) = \frac{z}{(2z-1)}$ .  $H(z)$  présente donc un pôle en  $z=1/2$ , le système est donc stable. Sa réponse impulsionnelle est :  $h(n) = (1/2)(1/2)^n$ , elle converge vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ .

Exemple n° 3 :

Soit le filtre RII obéissant à l'équation récurrente  $y(n) = 2[x(n) + y(n-1)]$ , ce filtre a pour transformée en Z ;  $H(z) = \frac{2z}{(z-2)}$ .  $H(z)$  présente un pôle en  $z=2$ , donc à l'extérieur du cercle unité, le système est donc instable. Sa réponse impulsionnelle est :  $h(n)=2(2)^n$ , elle diverge quand  $n \rightarrow \infty$ .

### III-2- Comportement fréquentiel des filtres numériques

Le comportement fréquentiel des filtres numériques est obtenu en étudiant la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$ ;  $T_n(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T_e}}$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage (voir annexe I).  $T_n(j\omega)$  est également la transformée de Fourier numérique des échantillons  $h(n)$  de la réponse impulsionnelle (voir Vol.4).

$$\begin{aligned} T_n(j\omega) &= H(z)|_{z=e^{j\omega T_e}} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-jn\omega T_e} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cos(n\omega T_e) + j \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \sin(n\omega T_e) \end{aligned} \quad (45)$$

On rappelle que  $T_n(j\omega)$  est une fonction périodique de la fréquence, de période  $f_e=1/T_e$ , par ailleurs la partie réelle de  $T_n(j\omega)$  est paire alors que la partie imaginaire est impaire. Pour illustrer la signification de  $T_n(j\omega)$ , prenons la cas d'un système numérique attaqué par une séquence  $A\cos(\omega_0 n T_e)$ . En régime permanent, la sortie du système sera encore une séquence cosinusoidale, elle s'écrit :

$$A|T_n(j\omega_0)| \cos[\omega_0 n T_e + \phi_n(\omega_0)] \text{ avec } \mathbf{j}_n(\mathbf{w}_0) = \text{arctg}(T_n(j\mathbf{w}))|_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_0}$$

**Remarque :** La fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  est encore la transformée de Fourier numérique de la réponse impulsionnelle  $h(n)$ .

Pour les systèmes analogiques, l'équivalent de  $T_n(j\omega)$  est  $H(j\omega)$  obtenu en faisant  $p=j\omega$  dans  $H(p)$ .  $H(j\omega)$  est encore la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du système analogique :  $H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$  pour un système causal.

### III - 3 - Synthèse des filtres RII

Les coefficients  $a_j$  et  $b_i$  de la relation (41) sont généralement obtenus à partir d'une **fonction modèle**.

La fonction modèle utilisée est soit la **réponse en fréquence** soit la **réponse impulsionnelle** d'un filtre analogique connu, par exemple un filtre passe-bas de type Butterworth du 4<sup>ème</sup> ordre. Nous traitons successivement les deux cas.

$\alpha)$  la fonction modèle est la réponse en fréquence : transformée bilinéaire

Soit donc un filtre analogique dont la fonction de transfert  $H(p)$  est connue. La réponse en fréquence du filtre  $H(j\omega)$  est obtenue en calculant  $H(p)$  pour  $p=j\omega$ .

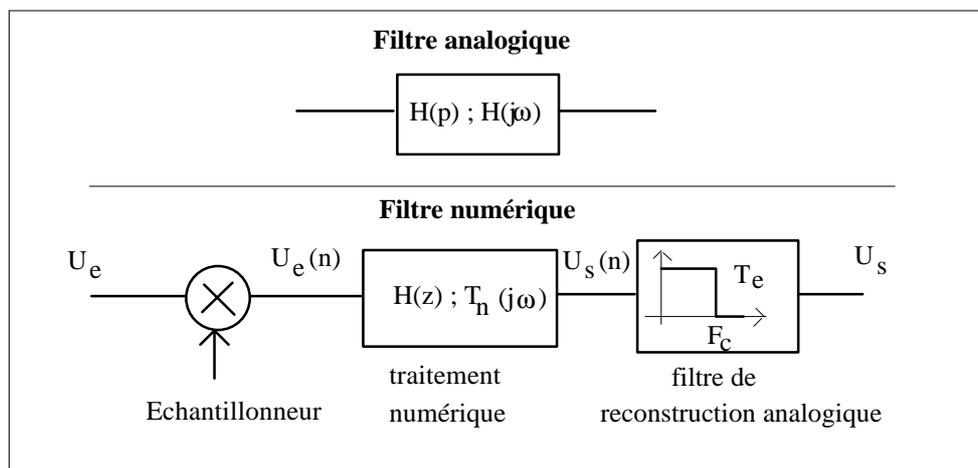


Fig. 25 Equivalence entre filtres analogiques et numériques

Le filtre numérique équivalent comprend trois blocs. Le premier bloc réalise l'échantillonnage, le deuxième bloc réalise le traitement numérique proprement dit, il est caractérisé par une fonction de transfert  $H(z)$ , le troisième bloc est un filtre de reconstruction analogique.

On rappelle que si le signal  $U_e$  est à bande passante limitée  $B_{\max}$  et si le filtre de reconstruction est idéal avec une fréquence de coupure  $F_c$  telle  $B_{\max} < F_c < 2B_{\max}$  alors  $U_s = U_e$  si  $H(z)=1$ , autrement dit  $U_s(n)=U_e(n)$ .

En conséquence si on veut réaliser un filtre numérique qui effectue le même traitement que le filtre analogique de réponse en fréquence  $H(j\omega)$ , il faut vérifier l'égalité suivante :

$$H(j\omega) = H(p)|_{p=j\omega} = T_n(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T_e}} \quad (46)$$

$H(z)$  est donc obtenu en faisant  $p = \frac{1}{T_e} \log(z)$  dans  $H(p)$ .

Exemple : prenons le cas d'un filtre passe-bas avec  $H(p)=1/(1+\tau p)$ , on obtient pour  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{t}{T_e} \log(z)}$$

On vérifie bien que  $T_n(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{t}{T_e} \log(e^{j\omega T_e})} = \frac{1}{1 + \frac{t}{T_e} j\omega T_e} = \frac{1}{1 + j\omega t} = H(j\omega)$

En général, la fonction de transfert  $H(p)$  est sous **forme rationnelle** (quotient de deux polynômes en  $p$ ), il s'ensuit que la transformée en  $z$  obtenue en faisant  $p = \frac{1}{T_e} \log(z)$  ne conduit pas à une forme rationnelle pour  $H(z)$ . Si  $H(z)$  n'est pas sous une forme rationnelle alors il est impossible d'obtenir la relation de récurrence (41), et par conséquent d'implémenter le filtre.

On procède alors à une approximation qui consiste à dire que  $T_n(j\omega)$  sera proche de  $H(j\omega)$  pour les basses fréquences, approximation tout à fait légitime. En effet, une opération de filtrage numérique nécessite au préalable un échantillonnage à la fréquence  $F_e$ , ce qui suppose que toutes les fréquences supérieures à  $F_e/2$  ont été éliminées, sinon il y a repliement des spectres.

En conséquence, la relation  $p = \frac{1}{T_e} \log(z)$  est approximée par la forme rationnelle suivante :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \quad (47)$$

obtenue en cherchant un développement quand  $pT_e$  reste voisin de zéro.

démonstration : Si  $pT_e$  reste voisin de zéro ;  $z$  est voisin de l'unité. Posons alors  $z = (1+x)/(1-x)$  avec  $x \ll 1$ , et cherchons un développement limité de  $\log[(1+x)/(1-x)]$  pour  $x$  petit devant l'unité. Il vient :

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x) = (x - x^2/2 + x^3/3 + \dots) - (-x - x^2/2 - x^3/3 + \dots)$$

$\approx 2x$ , en ne conservant que les termes au premier ordre.

Par ailleurs,  $x = (z-1)/(z+1)$ , on obtient finalement :

$$\log(z) = 2 \frac{(z-1)}{(z+1)}, \text{ d'où la relation de passage de l'espace des } p \text{ à l'espace des } z :$$

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}$$

La transformation approchée (47) fait que les filtres analogiques et numériques auront le même gain pour deux fréquences  $f_a$  et  $f_n$  différentes comme le montre la Fig. 26. Cherchons la relation entre  $f_a$  et  $f_n$ .

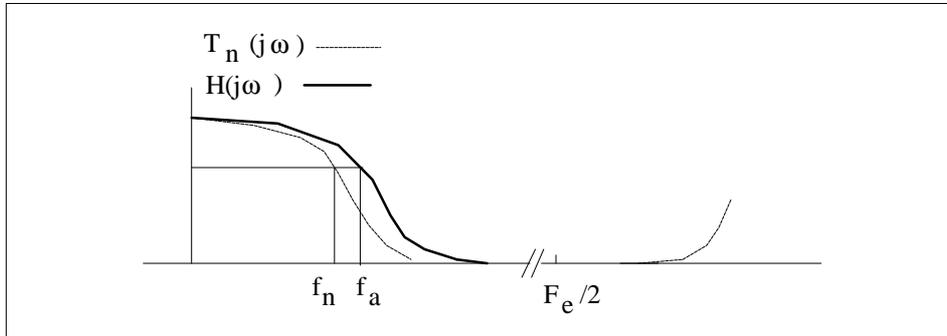


Fig. 26 Filtres analogique et numérique ont même valeur de gain pour deux fréquences  $f_a$  et  $f_n$  différentes

Le gain du filtre analogique  $H(p)$  est obtenu en remplaçant  $p$  par  $j\omega_a$  et celui du filtre numérique  $H(z)$  en remplaçant  $z$  par  $e^{j\omega_n T_e}$ , d'après (47) la relation entre  $f_a$  et  $f_n$  est donnée par :

$$p = \frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1} \rightarrow j\omega_a = \frac{2}{T_e} \frac{(e^{j\omega_n T_e} - 1)}{(e^{j\omega_n T_e} + 1)} = \frac{2}{T_e} \frac{e^{j\omega_n T_e/2} (e^{j\omega_n T_e/2} - e^{-j\omega_n T_e/2})}{e^{j\omega_n T_e/2} (e^{j\omega_n T_e/2} + e^{-j\omega_n T_e/2})}$$

$$j\omega_a = \frac{2}{T_e} j \operatorname{tg}\left(\frac{\omega_n T_e}{2}\right) \rightarrow f_a = \frac{f_e}{p} \operatorname{tg}\left(\frac{p f_n}{f_e}\right) \quad (48)$$

Sur la Fig. 27,  $f_a$  est tracé en fonction de  $f_n$ . On remarque que pour la fréquence  $f_n = f_e/2$ , le filtre numérique aura le gain du filtre analogique à la fréquence infinie ( $f_a \rightarrow \infty$ ).

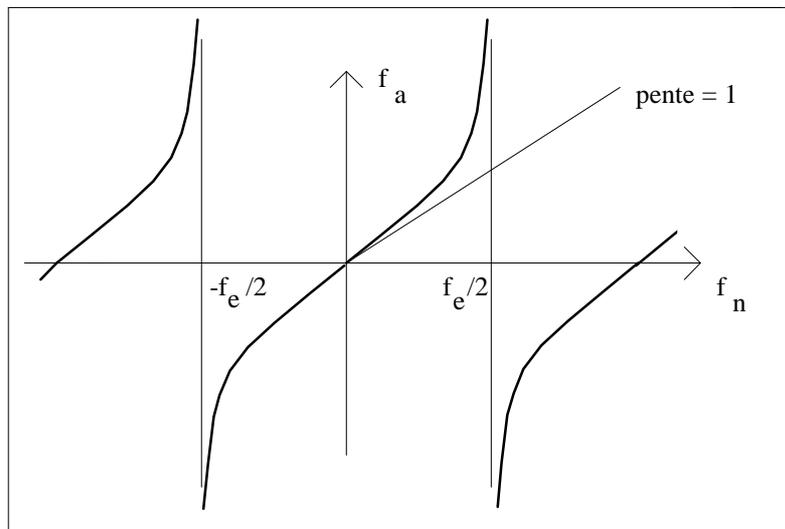


Fig. 27 variation de  $f_a$  en fonction de  $f_n$

Le facteur  $2/T_e$  de la relation (47) apparaît uniquement comme un facteur d'échelle, il est remplacé par une constante  $k$  à déterminer. Finalement, la transformation pour passer du plan des  $p$  au plan des  $z$  se met sous la forme suivante :

$$p = k \frac{z-1}{z+1} \quad (49)$$

Cette transformation est connue sous le nom de **transformée bilinéaire**. Les filtres analogique et numérique auront le même gain pour des fréquences  $f_a$  et  $f_n$ . Ces fréquences sont obtenues en remplaçant dans (49)  $p$  par  $j\omega_a$  et  $z$  par  $e^{j\omega_n T_e}$ , on obtient :

$$f_a = \frac{k}{2p} \operatorname{tg}(pf_n / f_e) \quad (50)$$

La constante  $k$  est calculée de telle manière que filtres analogique et numérique aient le même gain pour une fréquence particulière donnée  $f_p$ , comme le montre la Fig. 28.

En général, les fonctions de transfert des filtres analogiques sont données avec la variable  $s = p / \omega_0$ , où  $\omega_0$  est la pulsation caractéristique, par exemple la pulsation de coupure à -3dB pour un filtre de type Butterworth. Il suffit de modifier comme suit la relation (49) :

$$p = k \frac{z-1}{z+1} \rightarrow \frac{p}{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0} \frac{z-1}{z+1} \rightarrow s = K \frac{z-1}{z+1} \text{ avec } K = \frac{k}{\omega_0} \quad (51)$$

De la même manière la relation (50) devient :

$$f_a = \frac{k}{2p} \operatorname{tg}(pf_n / f_e) \rightarrow \frac{f_a}{f_0} = \frac{k}{2pf_0} \operatorname{tg}(pf_n / f_e) \rightarrow \frac{f_a}{f_0} = K \operatorname{tg}(pf_n / f_e) \quad (52)$$

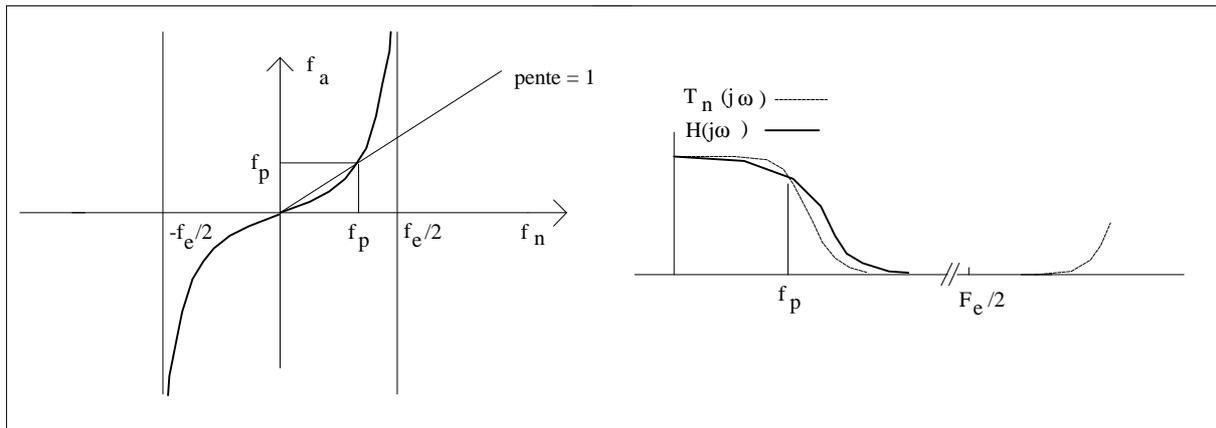
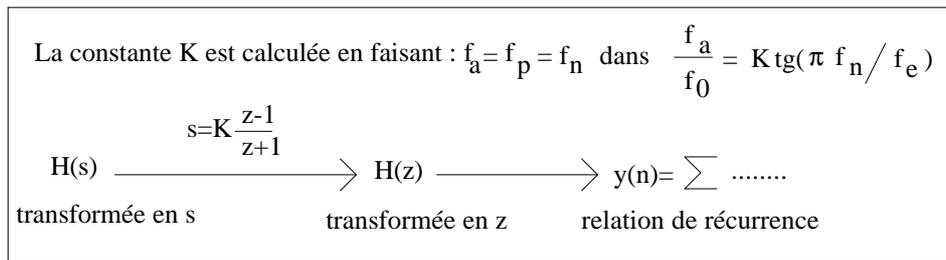


Fig. 28 La constante  $k$  est calculée de façon  $H(j\omega_p) = T_n(j\omega_p)$

Finalement la méthode se résume à :



β) Exemple de calcul d'un filtre par utilisation de la transformée bilinéaire

Soit à construire un filtre numérique échantillonné à la fréquence  $f_e=4\text{kHz}$ . La fonction modèle est la réponse en fréquence d'un filtre passe-bas de type Butterworth du 2<sup>ème</sup> ordre dont la fréquence de coupure à -3dB est égale à 500Hz. On désire que les filtres analogique et numérique aient le même gain à 500Hz.

La fonction de transfert  $H(s)$  du filtre analogique s'écrit :

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s/Q + 1} \quad \text{avec } Q = 1/\sqrt{2}$$

Dans un filtre de Butterworth, la fréquence caractéristique  $f_0$  est égale à la fréquence de coupure à -3dB, donc  $f_0=500\text{Hz}$ .

La valeur K de la relation (52) s'obtient de la manière suivante :

$$\frac{f_a}{f_0} = K \operatorname{tg}(\pi f_n / f_e) \rightarrow \frac{500}{500} = K \operatorname{tg}\left(\frac{\pi 500}{4000}\right) \quad \text{d'où } K = 2.4142$$

En remplaçant s par  $K(z-1)/(z+1)$ , on obtient :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.0976z^{-2} + 0.1952z^{-1} + 0.0976}{0.333z^{-2} - 0.9428z^{-1} + 1}$$

La relation de récurrence s'écrit :

$$y(n) = 0.0976x(n) + 0.1952x(n-1) + 0.0976x(n-2) + 0.9428y(n-1) - 0.333y(n-2)$$

Le module et la phase de  $T_n(j\omega)$  sont tracés sur la Fig. 29. On remarque que pour  $f \ll f_e$ ,  $T_n(j\omega)$  suit bien  $H(j\omega)$ , on vérifie en particulier que l'atténuation est de 3dB à la fréquence de 500Hz. L'atténuation est infinie pour  $f=f_e/2$ , en accord avec les tracés de la Fig. 28.

La réponse impulsionnelle  $h(n)$  est par contre différente de la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du filtre de Butterworth ;  $h(t) = w_0 \sqrt{2} \exp(-t w_0 / \sqrt{2}) \sin(t w_0 / \sqrt{2})$ . On remarque par exemple que  $h(n=0)$  est différent de zéro alors que  $h(t=0)=0$ , voir les tracés de  $h(n)$  et  $h(t)$  sur la Fig. 30.

γ) la fonction modèle est la réponse impulsionnelle : invariance impulsionnelle

Il s'agit de fabriquer un filtre numérique dont la réponse impulsionnelle  $h(n)$  est obtenue en échantillonnant la réponse impulsionnelle  $h(t)$  d'un filtre analogique connu. Soit un filtre analogique de fonction de transfert  $H(p)$  et de réponse impulsionnelle  $h(t)$  telle que :

$$H(p) = \text{transformée de Laplace de } h(t)$$

Soient  $p_k$  les pôles de la fonction de transfert  $H(p)$ , la décomposition en éléments simples de  $H(p)$  conduit à :

$$H(p) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(p - p_k)} \quad (53)$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, on obtient pour  $h(t)$  :

$$h(t) = \sum_{k=1}^N A_k \exp(p_k t)$$

Les échantillons  $h(n)$  de la réponse impulsionnelle du filtre numérique sont construits par échantillonnage de  $h(t)$  aux instants  $nT_e$  où  $T_e$  est la période d'échantillonnage, on obtient ainsi :

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k \exp(p_k nT_e)$$

La transformée en  $Z$  du filtre numérique est égale à la transformée en  $Z$  de la réponse impulsionnelle d'où :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N A_k \exp(p_k nT_e) \right) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^N A_k \exp(p_k nT_e) z^{-n} \right) = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_k z^{-n} \exp(p_k nT_e) \right)$$

On démontre facilement que :  $\sum_{n=0}^{\infty} A_k z^{-n} \exp(p_k nT_e) = \frac{A_k}{(1 - z^{-1} \exp(p_k T_e))}$ , en effet il s'agit de la somme d'une progression géométrique de raison  $z^{-1} \exp(p_k T_e)$ .  $H(z)$  se met donc sous la forme suivante :

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - z^{-1} \exp(p_k T_e))} \quad (54)$$

A partir de  $H(z)$  il est facile de construire la relation de récurrence.

remarque n°1 : Les pôles de  $H(z)$  sont donnés par :

$$z = \exp(p_k T_e)$$

La partie réelle des  $p_k$  est négative car le système analogique est stable. Il s'ensuit que le module des pôles  $|\exp(p_k T_e)|$  est inférieur à l'unité, en conclusion le système numérique est donc stable car le lieu du module des pôles est à l'intérieur du cercle unité.

remarque n°2 : Pour  $\omega \rightarrow 0$ , la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  est donnée par :

$$T_n(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - \exp(p_k T_e))}$$

Cette valeur est à comparer à  $H(j\omega)$ , la réponse en fréquence du filtre analogique, pour  $\omega \rightarrow 0$ . D'après la relation (53) :

$$H(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{-p_k}$$

On constate donc que  $T_n(j\omega=0) \neq H(j\omega=0)$ . Si on veut obtenir  $T_n(j\omega=0) = H(j\omega=0)$ , il suffit de transformer la fonction de transfert  $H(z)$  de la manière suivante :

$$H(z) \rightarrow \left\{ \frac{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{-p_k}}{\sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - \exp(p_k T_e))}} \right\} \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{(1 - z^{-1} \exp(p_k T_e))}$$

Si la fréquence d'échantillonnage est élevée alors  $T_e$  est petit et  $\exp(p_k T_e) \approx 1 + p_k T_e$ , il s'ensuit que le terme correctif entre crochets est voisin de  $T_e$ .

ε) Exemple de calcul d'un filtre par utilisation de l'invariance impulsionnelle

Soit à construire un filtre numérique échantillonné à la fréquence  $f_e = 4\text{kHz}$ . La fonction modèle est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas de type Butterworth du 2<sup>ème</sup> ordre dont la fréquence de coupure à -3dB est égale à 500Hz.

La fonction de transfert  $H(p)$  de ce filtre s'écrit :  $H(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + p\omega_0/Q + \omega_0^2}$  avec  $Q = 1/\sqrt{2}$

La décomposition en éléments simples se met sous la forme :

$$H(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2}$$

avec  $p_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(-1 + j)$  et  $p_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(-1 - j)$  puis  $A_1 = -A_2 = -j\omega_0 / \sqrt{2}$

La réponse impulsionnelle du filtre  $h(t)$  du filtre s'écrit :

$$h(t) = A_1 \exp(tp_1) + A_2 \exp(tp_2)$$

La réponse impulsionnelle  $h(n)$  du filtre numérique s'écrit donc :

$$h(n) = A_1 \exp(nT_e p_1) + A_2 \exp(nT_e p_2)$$

On en déduit, d'après la relation (54), la fonction de transfert  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{A_1}{(1 - z^{-1} \exp(p_1 T_e))} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1} \exp(p_2 T_e))}$$

En remplaçant  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $p_1$  et  $p_2$  par leurs valeurs littérales, on obtient finalement pour expression de  $H(z)$  :

$$H(z) = \frac{z^{-1} w_0 \sqrt{2} \sin(w_0 T_e / \sqrt{2}) \exp(-w_0 T_e / \sqrt{2})}{1 - z^{-1} 2 \cos(w_0 T_e / \sqrt{2}) \exp(-w_0 T_e / \sqrt{2}) + z^{-2} \exp(-w_0 T_e / \sqrt{2})}$$

En faisant dans  $H(z)$ ,  $\omega = \pi 500 \text{ rds}^-$  et  $T_e = (1/4000) \text{ s}$ , on obtient :

$$H(z) = \frac{1343.4 z^{-1}}{1 - 0.975 z^{-1} + 0.329 z^{-2}}$$

d'où la relation de récurrence suivante :

$$y(n) = 1343.4 x(n-1) + 0.975 y(n-1) - 0.329 y(n-2)$$

Le module et la phase de  $T_n(j\omega)$  sont tracés à la Fig. 31. La réponse impulsionnelle est tracée à la Fig. 32, on vérifie bien que  $h(n) = h(t = nT_e)$ .

### III - 4 - Synthèse des filtres RIF

Le calcul des coefficients des filtres FIR repose sur l'utilisation de la **transformée de Fourier numérique** et des **fenêtres spectrales** (rectangulaire, Hamming, Hanning, ...).

Une suite d'échantillon  $h(n)$  séparés de  $T_e = 1/F_e$  admet pour transformée de Fourier numérique  $H(f)$  :

$$H(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow \infty} h(n) e^{-j2\pi f n T_e} \quad (55)$$

La transformée de Fourier numérique  $H(f)$  est périodique :  $H(f + qF_e) = H(f)$  avec  $q$  égal à un entier. Pour  $0 < f < F_e$ , le module de  $H(f)$  est symétrique par rapport à  $F_e/2$ , c'est à dire que :  $|H(f)| = |H(F_e - f)|$  pour  $0 < f < F_e/2$ . La transformée de Fourier numérique est identique à la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$ .

La transformée de Fourier inverse de  $H(f)$  permet de récupérer les échantillons  $h(n)$ , on montre que (pour le vérifier il suffit de remplacer  $H(f)$  de la relation (55) dans la relation (56)) :

$$h(n) = T_e \int_{-F_c/2}^{F_c/2} H(f) e^{j2\pi f n T_e} df \quad (56)$$

A partir de ces considérations, essayons de réaliser un filtre FIR passe-bas ayant une fréquence de coupure  $F_c$  comme le montre la Fig. 33 ci-dessous.

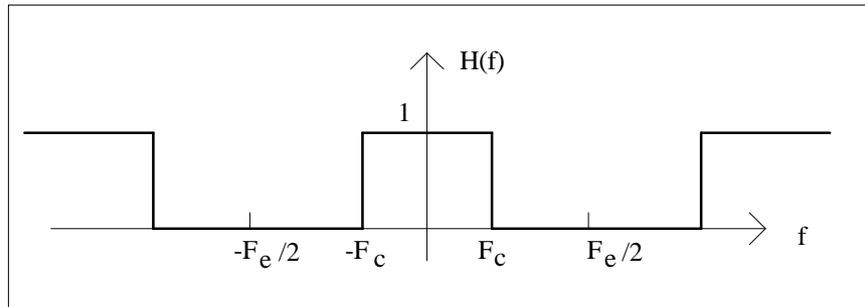


Fig. 33 Transformée de Fourier numérique d'un filtre passe-bas idéal

D'après la relation (56), les échantillons  $h(n)$  de la **réponse impulsionnelle** du filtre sont obtenus en calculant :

$$h(n) = T_e \int_{-F_c/2}^{F_c/2} e^{j2\pi f n T_e} df = \frac{\sin(2\pi F_c n T_e)}{\pi n} \quad (57)$$

Deux problèmes apparaissent immédiatement :

- 1- la suite des échantillons est infinie,  $h(n)$  existe qqs. soit  $n$
- 2-  $h(n)$  est non causal, donc impossible de réaliser le filtre en temps réel,  $h(n) \neq 0$  pour  $n < 0$

On remédie au premier problème en tronquant la suite des échantillons  $h(n)$ , les échantillons  $h_1(n)$  retenus sont les échantillons pondérés par une fenêtre temporelle  $y(n)$  comprenant seulement  $N$  échantillons, voir la Fig. 34. Dans le domaine des fréquences, la nouvelle transformée de Fourier numérique des échantillons  $h_1(n)$  est égale au produit de convolution de  $H(f)$  par  $Y(f)$  : la transformée de Fourier numérique des échantillons  $y(n)$ .

$$h_1(n) = h(n)y(n) \rightarrow H_1(f) = H(f) \otimes Y(f)$$

Le produit de convolution  $H(f) \otimes Y(f)$  a pour conséquence :

- la transition entre bande passante et bande d'arrêt est moins abrupte que pour  $H(f)$ , cette transition, voir la Fig. 35 ci-dessous, est appelée transition de Gibbs.
- l'apparition d'ondulations dans les bandes passante et d'arrêt

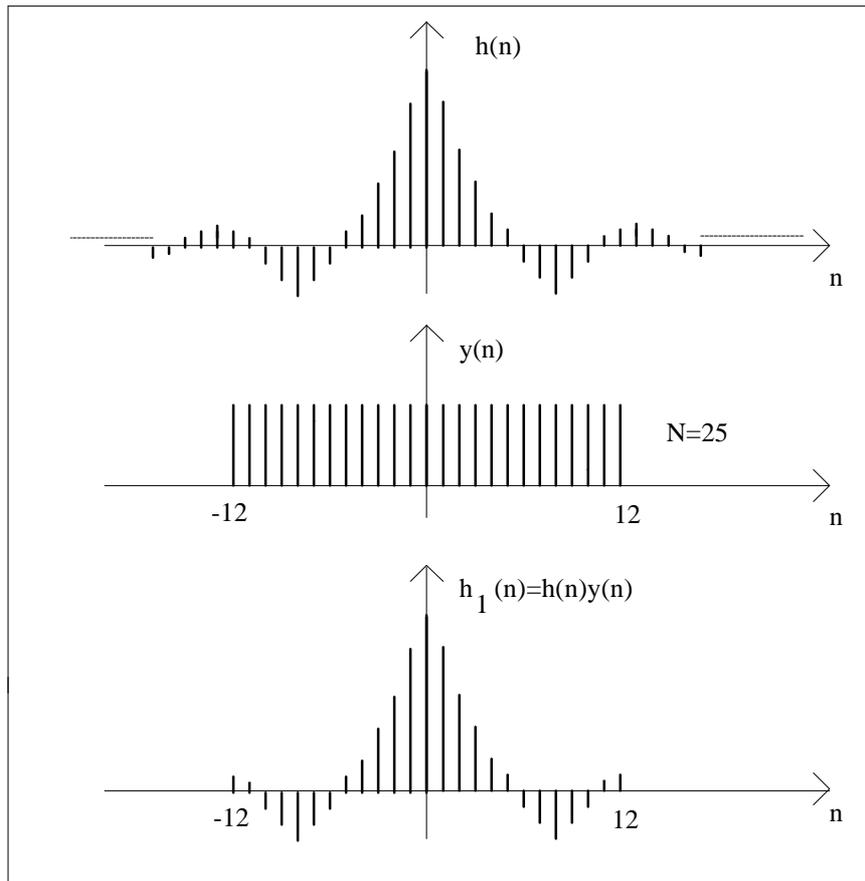


Fig. 34 Pondération des échantillons  $h(n)$  par une fenêtre rectangulaire  $y(n)$

En pratique, on dispose de différentes fenêtres de pondération : rectangulaire, Hamming, Hanning, Kaiser, Blackman, ... . Une fenêtre spectrale est caractérisée dans le domaine fréquentiel par :

- la largeur du lobe principal qui définit la largeur de la transition de Gibbs
- les lobes secondaires qui conduisent aux ondulations dans les bandes passante et d'arrêt.

On ne peut évidemment comparer que des fenêtres ayant le même nombre d'échantillons  $N$ . La fenêtre rectangulaire est celle qui assure la transition de Gibbs la plus étroite, par contre les ondulations dans les bandes passante et d'arrêt sont importantes. La fenêtre de Hamming assure quant à elle des ondulations moindres, par contre la largeur de la transition de Gibbs est plus importante, etc ... .

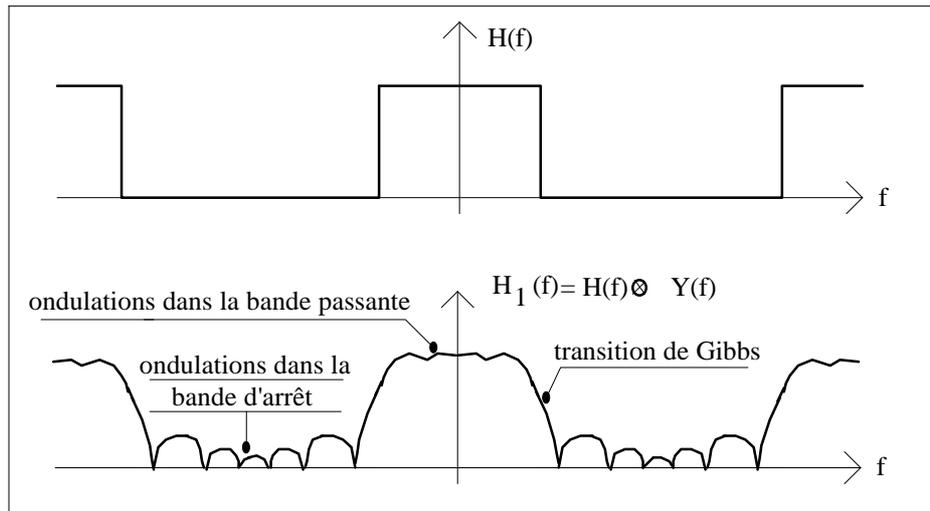


Fig. 35 Transformées de Fourier numériques avant et après fenêtrage

Pour remédier au deuxième point mentionné ci-dessus, c'est à dire la non causalité du filtre, on procède à une translation des échantillons  $h_1(n)$  de manière à rendre le filtre causal donc réalisable en temps réel. La nouvelle suite d'échantillons  $h_2(n)$  se déduit de  $h_1(n)$  par la relation suivante :

$$h_2(n) = h_1\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \quad ; \quad n=0, 1, \dots, N-2, N-1 \quad (58)$$

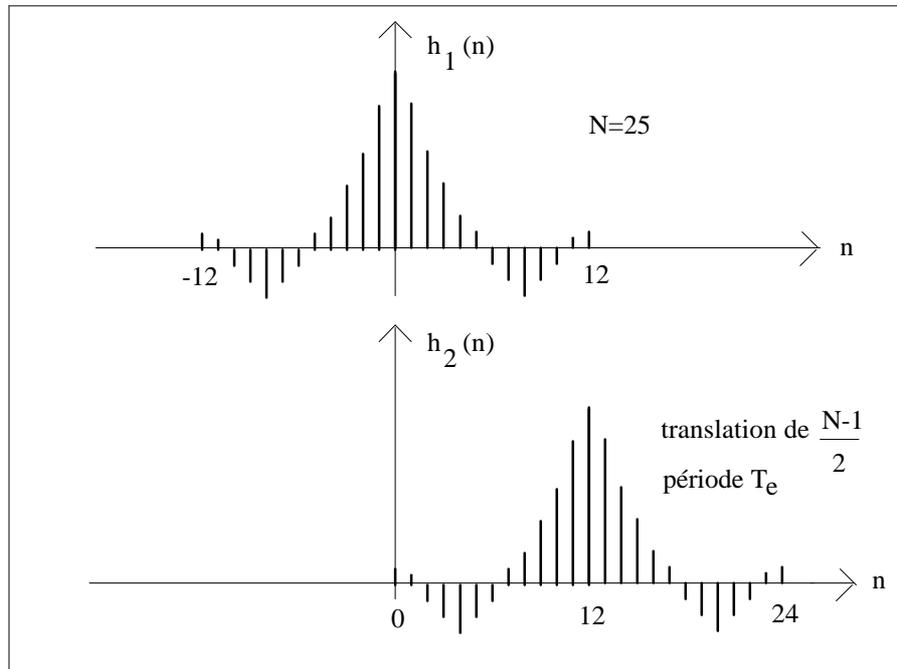


Fig. 36 Les échantillons  $h_2(n)$  sont obtenus à partir des échantillons  $h_1(n)$  par translation

Déterminons maintenant la nouvelle transformée de Fourier numérique des échantillons  $h_2(n)$ . Pour l'obtenir, on démontre ci-dessous deux théorèmes très généraux :

**théorème n° 1 : Transformée de Fourier numérique d'une suite d'échantillons traduits dans le domaine temporel**

Soit une suite d'échantillons  $x(k)$  ayant pour transformée de Fourier numérique  $X(f)$ , avec  $X(f) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(k)e^{-j2\pi fkT_e}$ . Quelle est la transformée de Fourier des échantillons translatsés de  $M$  période  $T_e$  ? Les échantillons translatsés  $y(k)$  s'écrivent :

$$y(k) = x(k - M) \quad (59)$$

et leur transformée de Fourier numérique :

$$Y(f) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} y(k)e^{-j2\pi fkT_e} = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(k - M)e^{-j2\pi fkT_e} \quad (60)$$

En effectuant le changement de variable,  $k-M=u$ , on obtient :

$$Y(f) = \sum_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow \infty} x(u)e^{-j2\pi f(u+M)T_e} = e^{-j2\pi fMT_e} \sum_{u \rightarrow -\infty}^{u \rightarrow \infty} x(u)e^{-j2\pi fuT_e} = e^{-j2\pi fMT_e} X(f) \quad (61)$$

Comme on pouvait s'y attendre, le **module** de la transformée de Fourier n'est pas modifié, seule la phase est changée :  $\phi_Y(f) = \phi_X(f) - 2\pi fMT_e$ .

### théorème n° 2 : Transformée de Fourier numérique d'une suite d'échantillons $x(n)$ vérifiant la propriété de symétrie $x(n)=x(-n)$

Nous montrons que si une suite d'échantillons  $x(n)$  vérifie la propriété de symétrie  $x(n)=x(-n)$ , alors la transformée de Fourier numérique  $X(f)$  des échantillons  $x(n)$  est purement réelle.

$$X(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n \rightarrow \infty} x(n)e^{-j2\pi fnT_e} = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{n=-1} x(n)e^{-j2\pi fnT_e} + x(0) + \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x(n)e^{-j2\pi fnT_e} \quad (62)$$

utilisons la propriété de symétrie :  $x(n)=x(-n)$  et effectuons le changement de variable  $n=-u$  dans  $\sum_{n \rightarrow -\infty}^{n=-1} (\dots)$ , il vient :

$$X(f) = \sum_{u \rightarrow \infty}^{u=1} x(-u)e^{j2\pi fuT_e} + x(0) + \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x(n)e^{-j2\pi fnT_e} = x(0) + \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x(n)(e^{-j2\pi fnT_e} + e^{j2\pi fnT_e})$$

$$X(f) = x(0) + 2 \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} x(n) \cos(2\pi fnT_e) \quad (63)$$

La transformée de Fourier numérique  $X(f)$  est réelle, en conclusion le théorème s'énonce ainsi : la transformée de Fourier numérique d'une suite d'échantillons  $x(n)$  vérifiant la propriété de symétrie  $x(n)=x(-n)$  est purement **réelle**.

Appliquons ces deux théorèmes au cas du filtre FIR étudié précédemment. Les échantillons  $h_1(n)$  obtenus par fenêtrage vérifient la propriété de symétrie  $h_1(n)=h_1(-n)$ , il s'ensuit que  $H_1(f)$  est à phase nulle, d'après le théorème n°2.

Les échantillons  $h_2(n)$  obtenus par translation de  $(N-1)/2$  période d'horloge des échantillons  $h_1(n)$  ont une transformée de Fourier numérique dont la phase est égale à :  $-2\pi f \left(\frac{N-1}{2}\right)T_e$ , d'après le théorème n°1. Le retard de groupe (groupe delay)  $\tau = \left|\frac{d\phi}{d\omega}\right|$  est donc une constante : il vaut  $\left(\frac{N-1}{2}\right)T_e$ .

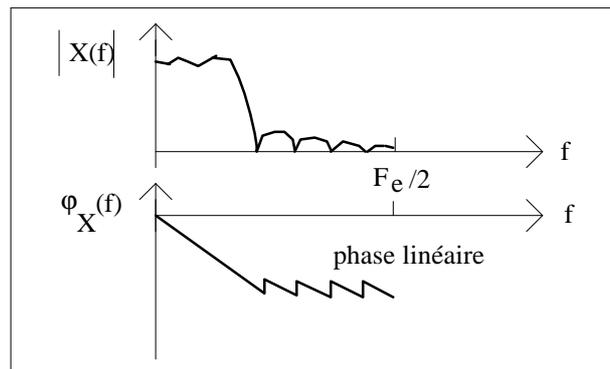


Fig. 37 La phase de la transformée de Fourier numérique des échantillons  $h_2(n)$  est linéaire

En résumé :

type de filtre	IIR	FIR
méthode de calcul des coefficients	fonctions modèles ex : transformée bilinéaire	fenêtrage, ... (rectangulaire, Hamming ...)
avantages	* peu de coefficients → rapidité de calcul → peu d'espace mémoire	* phase linéaire → pas de déformation des signaux * toujours stable
inconvenients	* phase non linéaire * risque d'instabilité	* n <sup>bre</sup> de coefficients élevé → temps de calcul long → espace mémoire important

A titre d'exemple les Fig. 38, 39 et 40 montrent les modules, phases et réponses impulsionnelles de trois filtres RIF obtenus avec respectivement une fenêtre rectangulaire, de Hanning et de Hamming, le nombre d'échantillons est limité à 21 seulement. On note que la largeur de la transition est plus faible dans le cas de la fenêtre rectangulaire, par contre l'amplitude des oscillations est plus importante.

La Fig. 41 permet de comparer trois filtres RIF avec 256 échantillons. La comparaison avec les Fig. 38, 39 et 40 montre que plus le nombre d'échantillons est élevé plus la transition est abrupte et plus on se rapproche du filtre idéal.

### III-5- Implémentation des filtres RII et RIF les processeurs de traitement de signaux

Les filtres numériques sont particulièrement utilisés dans le traitement du son et des images, la reconnaissance de forme, l'analyse spectrale, ... etc. Parmi leurs principaux avantages on distingue :

- une grande fiabilité
- une absence de dérive
- une grande facilité pour modifier les coefficients des filtres

Les **DSP (Digital Signal Processor)** sont des processeurs spécialement dédiés aux traitements numériques des signaux ; le filtrage numérique est un cas particulier de traitement. La conception de filtres numériques à partir de **DSP** pose les problèmes suivants :

$\alpha$ ) approximation : consiste à générer une fonction de transfert qui satisfait un ensemble de conditions spécifiques dans le domaine fréquentiel ou (et) temporel, c'est la partie de cours traitée précédemment.

$\beta$ ) réalisation : plusieurs types de structures sont envisageables pour réaliser la fonction de transfert (*direct form, cascade, parallèle, ...*)

NB : Approximation et réalisation supposent une précision infinie.

$\gamma$ ) implémentation : elle tient compte de l'architecture (hardware) et des instructions disponibles (software) du processeur

$\kappa$ ) erreurs arithmétiques : les nombres sont codés sur un nombre fini de bits, il s'ensuit automatiquement des erreurs arithmétiques et d'éventuels dépassements (*overflow*).

Dans cette partie, on suppose traité le problème de l'approximation, on dispose donc des coefficients de la transformée  $H(z)$  du filtre, celle-ci se met sous la forme classique :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \text{Transf. en } z \text{ de } [h(n)] \quad (64)$$

où  $Y(z)$  et  $X(z)$  sont les transformées en  $z$  des suites d'échantillons  $y(n)$  et  $x(n)$  présentés à l'entrée et à la sortie du filtre numérique,  $h(n)$  est la réponse impulsionnelle du filtre.

La relation de récurrence s'écrit alors :

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (65)$$

Dans le cas des filtres RIF les coefficients  $a_k$  sont nuls.

#### III-5-1- Implémentation d'un filtre RIF dans un DSP

Pour ce type de filtre,  $y(n)$  est donc donné par :

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (66)$$

Les coefficients  $b_k$  de la relation (66) sont identiques aux éléments  $h(k)$  de la réponse impulsionnelle, en effet la transformée en  $z$  de la relation (64) s'écrit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} = \sum_{k=0}^M h(k) z^{-k} \quad (67)$$

L'équation (67) peut être représentée par la structure de la Fig. 42. Les branches avec l'étiquette  $z^{-1}$  correspondent à un retard d'une période d'horloge.

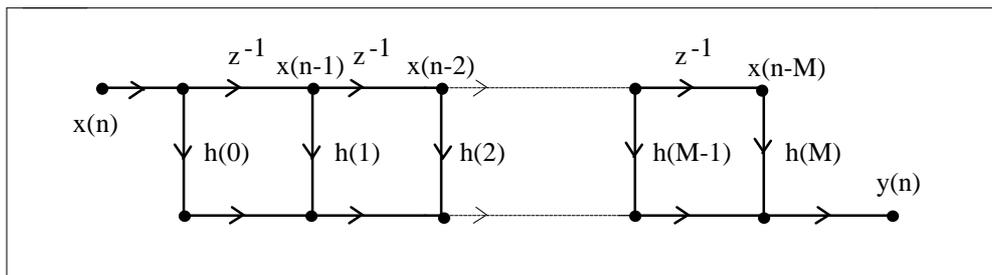


Fig. 42 Structure directe (*Direct-form*) d'un filtre FIR

Les coefficients  $h(0), h(1), \dots, h(M)$  doivent être stockés en mémoire, ainsi que les valeurs  $x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(M)$ , soit un total de  $2(M+1)$  valeurs.

L'implémentation des filtres RIF est facilitée par le mode d'adressage dit "*circular addressing*" des DSP.

### III-5-2- Implémentation d'un filtre RII

Trois méthodes sont généralement utilisées pour implémenter un filtre IIR dans un processeur :

- directe (*direct form*)
- en cascade (*cascade form*)
- en parallèle (*parallel form*)

Nous discutons ci-dessous les deux premières méthodes, la méthode cascade étant de loin la plus utilisée.

#### 1) Méthode d'implémentation directe

L'équation (65) peut être représentée par la structure en réseau de la Fig. 43, pour simplifier il a été supposé que  $N=M$ , la structure ainsi représentée est appelée : forme directe I (*direct-form I*). Les branches associées à  $z^{-1}$  correspondent à un retard d'une période d'horloge.

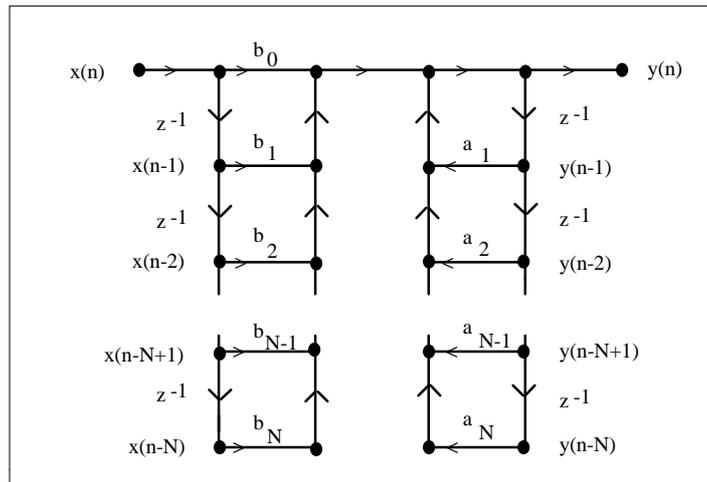


Fig. 43 Forme directe I

Pour réaliser un filtre d'ordre  $N$ , il est nécessaire de stocker les  $(N+1)$  valeurs  $x(n)$ ,  $x(n-1)$ , ...  $x(n-N)$ , les  $(N+1)$  coefficients  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_N$ , les  $N$  valeurs  $y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N)$  et les  $N$  coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , soit un total de  $(4N+2)$  valeurs. Il est possible de réduire la taille mémoire en adoptant la structure de la Fig. 44. Cette structure est appelée : forme II (*direct-form II*). Elle présente un plus petit nombre de branches avec l'opérateur  $z^{-1}$ .

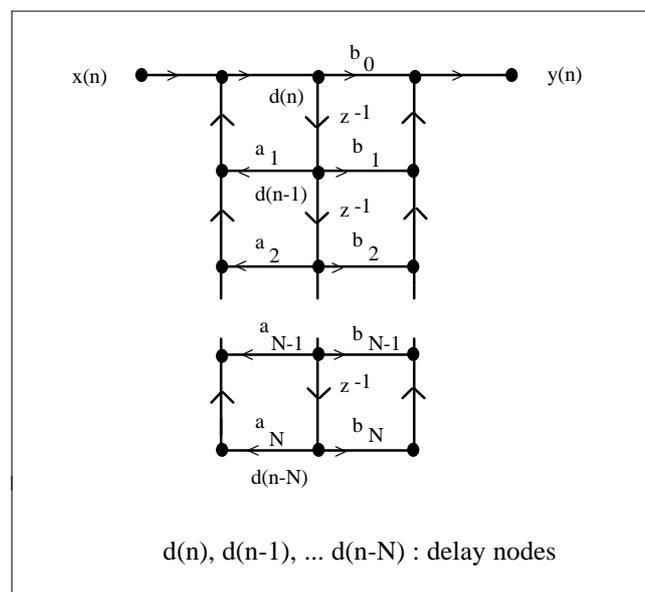


Fig. 44 Forme directe II

D'après la Fig. 44, on obtient :

$$y(n) = b_0 d(n) + b_1 d(n-1) + b_2 d(n-2) + b_3 d(n-3) + b_4 d(n-4) \dots + b_N d(n-N)$$

$$d(n) = x(n) + a_1 d(n-1) + a_2 d(n-2) + a_3 d(n-3) + a_4 d(n-4) + \dots + a_N d(n-N) \quad (68)$$

Il est facile de montrer que les deux équations (68) sont bien équivalentes à l'équation (65).

Pour réaliser un filtre d'ordre N avec la structure directe II, il est nécessaire de stocker les (N+1) valeurs  $d(n)$ ,  $d(n-1)$ ,  $d(n-2)$ , ...  $d(n-N)$ , les (N+1) coefficients  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_N$  et les N coefficients  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , soit un total de  $(3N+2)$  valeurs seulement.

La Fig. 45 représente la structure dans le cas particulier d'un filtre d'ordre deux (N=2). Les équations aux différences de cette structure s'écrivent :

$$\begin{aligned} y(n) &= b_0d(n) + b_1d(n-1) + b_2d(n-2) \\ d(n) &= x(n) + a_1d(n-1) + a_2d(n-2) \end{aligned} \quad (69)$$

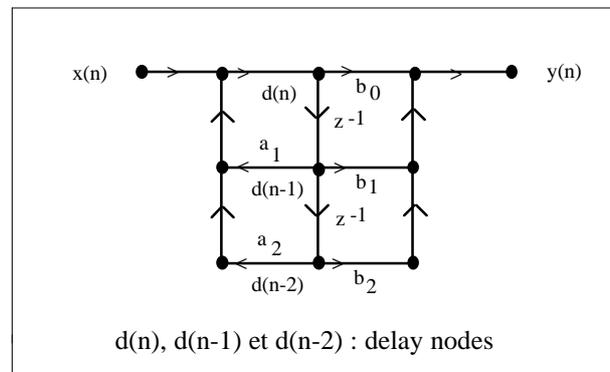


Fig. 45 Forme directe II d'un filtre IIR d'ordre deux

## 2) Méthode d'implémentation en cascade

L'implémentation d'une structure en cascade est une extension des résultats de l'implémentation d'une structure directe II.

La méthode consiste à décomposer la transformée en Z de l'équation (64) en produit de transformées du deuxième ordre (*biquad*).

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} \quad (70)$$

Les coefficients  $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots$  peuvent être obtenus au moyen de la boîte à outils "Signal Processing Toolbox" de Matlab. Une procédure typique d'obtention des coefficients d'un filtre de Butterworth à partir d'un gabarit donné fait appel à trois fonctions de Matlab :

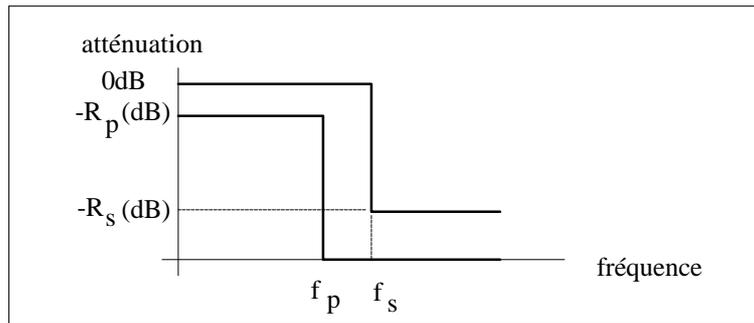


Fig. 46 Exemple de gabarit d'un filtre passe-bas

a) recherche de l'ordre :  $[n, Wn] = \text{buttord}(Wp, Ws, Rp, Rs)$ ,  $Wp = f_p / (F_e / 2)$  et  $Ws = f_s / (F_e / 2)$  où  $F_e$  est la fréquence d'échantillonnage,  $[n, Wn]$  renvoie l'ordre et la fréquence caractéristique, c'est la fréquence de coupure à -3dB.

b) détermination des coefficients sous forme de variables d'état :  $[A, B, C, D] = \text{butter}(n, Wn)$  ;  $[A, B, C, D]$  renvoie les coefficients du filtre sous forme de variables d'état

c) détermination des coefficients des *biquads* :  $\text{sos} = \text{ss2sos}(A, B, C, D)$  ;  $\text{sos}$  est un tableau qui contient les coefficients  $\beta_{0k}, \beta_{1k}, \beta_{2k}, \alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots$

La Fig. 47 montre la structure d'un filtre d'ordre 4. Dans cette structure chaque filtre d'ordre deux est implémenté en utilisant la forme directe II décrite précédemment.

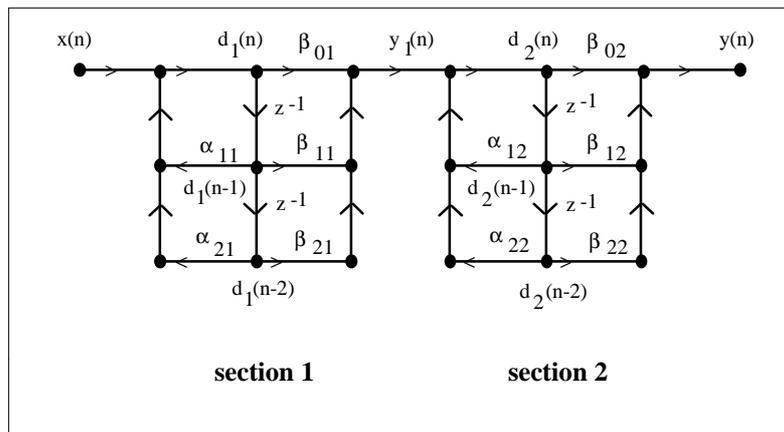


Fig. 47 Structure en cascade d'un filtre d'ordre 4

Dans le cas d'un filtre d'ordre  $N$ , les équations aux différences pour le  $i^{\text{ème}}$  biquad s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 d_i(n) &= y_{i-1}(n) + \alpha_{1i}d_i(n-1) + \alpha_{2i}d_i(n-2) \\
 y_i(n) &= \beta_{0i}d_i(n) + \beta_{1i}d_i(n-1) + \beta_{2i}d_i(n-2)
 \end{aligned}
 \tag{71}$$

où :  $i = 1, 2, \dots, N/2$

$y_{i-1}(n)$  est l'entrée de la section  $i$

$d_i(n)$  est la valeur à un nœud de la section  $i$

$y_i(n)$  est la sortie de la section  $i$

$y_0(n)=x(n)$  est l'échantillon d'entrée

$y_{N/2}=y(n)$  est la sortie du filtre

### III-5-3- Performances des filtres

Les filtres numériques sont généralement conçus avec l'hypothèse qu'ils seront implémentés dans des dispositifs de précision infinie. Tous les processeurs ont cependant une précision finie, en conséquence il est donc nécessaire d'approximer les coefficients obtenus par calcul. Cette approximation introduit une erreur de quantification des coefficients (*coefficient quantization error*). En conséquence, la caractéristique fréquence-tension du filtre réalisé est quelque peu différente de celle du filtre idéal. La quantification des coefficients peut conduire à un filtre instable, c'est particulièrement vrai dans le cas des filtres IIR passe-bande où les pôles sont très près du cercle de rayon unité dans le plan des  $z$ . Une quantification des coefficients peut entraîner un déplacement des pôles à l'extérieur du cercle unité et par conséquent une instabilité. Dans le cas d'un passe-bande les pôles sont d'autant plus près du cercle unité que la largeur de bande est faible.

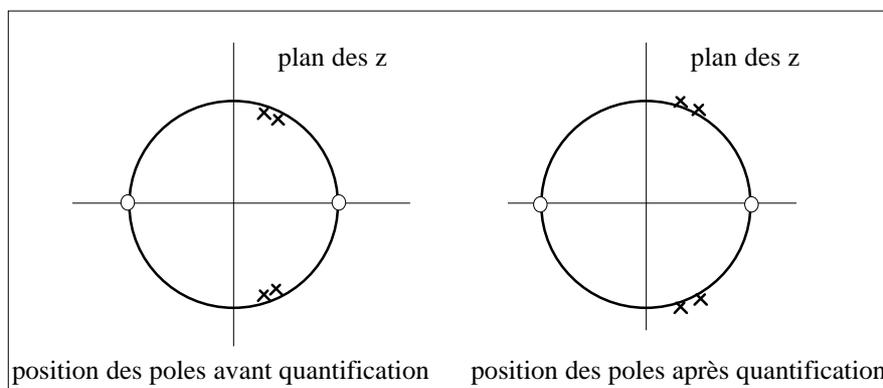


Fig. 48 Le déplacement des pôles à l'extérieur du cercle unité entraîne l'instabilité du filtre : cas d'un passe-bande d'ordre quatre.

Les effets de la quantification des coefficients sont fortement dépendant de la structure utilisée pour l'implémentation du filtre dans le processeur. Pour un filtre IIR, la structure cascade implémente chaque paire de pôles complexes conjugués indépendamment l'une de l'autre. Ceci n'est pas vrai dans le cas de la structure directe, il s'ensuit que la structure cascade est généralement utilisée pour l'implémentation des filtres RII.

1) processeur à virgule fixe et processeur à virgule flottante

Deux types de processeurs sont disponibles ; les processeurs à virgule fixe et à virgule flottante. Prenons par exemple le cas d'un processeur 32 bits (ex : TMS320C31 de Texas Instruments) pouvant travailler soit en virgule fixe soit encore en virgule flottante. S'il est utilisé en virgule fixe, les nombres sont écrits en complément à deux. Pour entrer les coefficients décimaux  $\alpha_k$  ou  $\beta_k$  on utilise un format QM, par exemple Q17. Ce format est obtenu en multipliant le coefficient par  $2^{17}$  et en ne conservant que la partie entière, voir l'exemple ci-dessous :

exemple : soit le coefficient  $\alpha_k = 2.000001$  à transformer en Q17  
 $2.000001 \times 2^{17} = 262\ 144.1311$ , partie entière = 262 144 soit  $2^{18}$  ou encore 40000 en hexadécimal (le coefficient est tronqué)

En complément à deux ce nombre s'écrit :

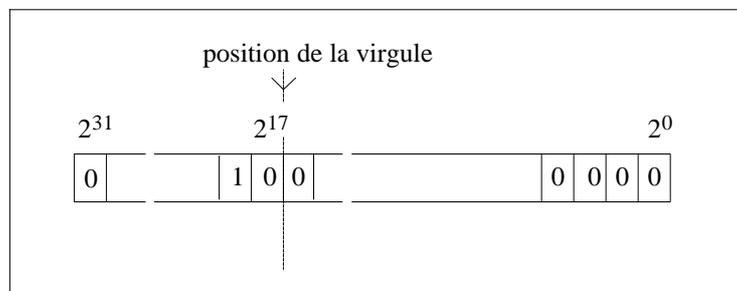


Fig. 49 Ecriture au format Q17 de 2.000001

Dans ce format, la position de la virgule est donc au niveau du poids  $2^{17}$ . Au cours des calculs ce coefficient est multiplié par  $d(n-k)$ , supposons qu'à une étape du calcul  $d(n-k) = 24575$  (5FFF en hexa.).

NB : Bien que l'entrée  $x(n)$  soit codée sur 14 bits (CNA bipolaire de 14 bits), il est possible que  $d(n)$  et donc  $d(n-k)$  deviennent supérieurs à  $x(n)$ , ( $x(n)$  max. est égal à  $2^{13}-1 = 8191$ ). Ceci est particulièrement vrai dans les filtres passe-bande, le rapport  $d(n)/x(n)$  est d'autant plus grand que la bande passante est étroite.

La multiplication en virgule fixe avec le TMS320C31 suppose des entiers signés codés sur 24 bits, le résultat est supposé être sur 48 bits, en fait seuls les 32 bits de poids faibles sont disponibles dans le registre de sortie du multiplieur. Avec l'exemple choisi, le bit de poids fort est perdu, le résultat  $\alpha_k d(n-k)$  est ensuite transféré vers un registre 32 bits, pour tenir compte de la position de la virgule, les 15 bits de poids forts du registre du multiplieur sont transférés vers un registre de 32 bits, comme le montre la Fig. 50 ci-dessous.

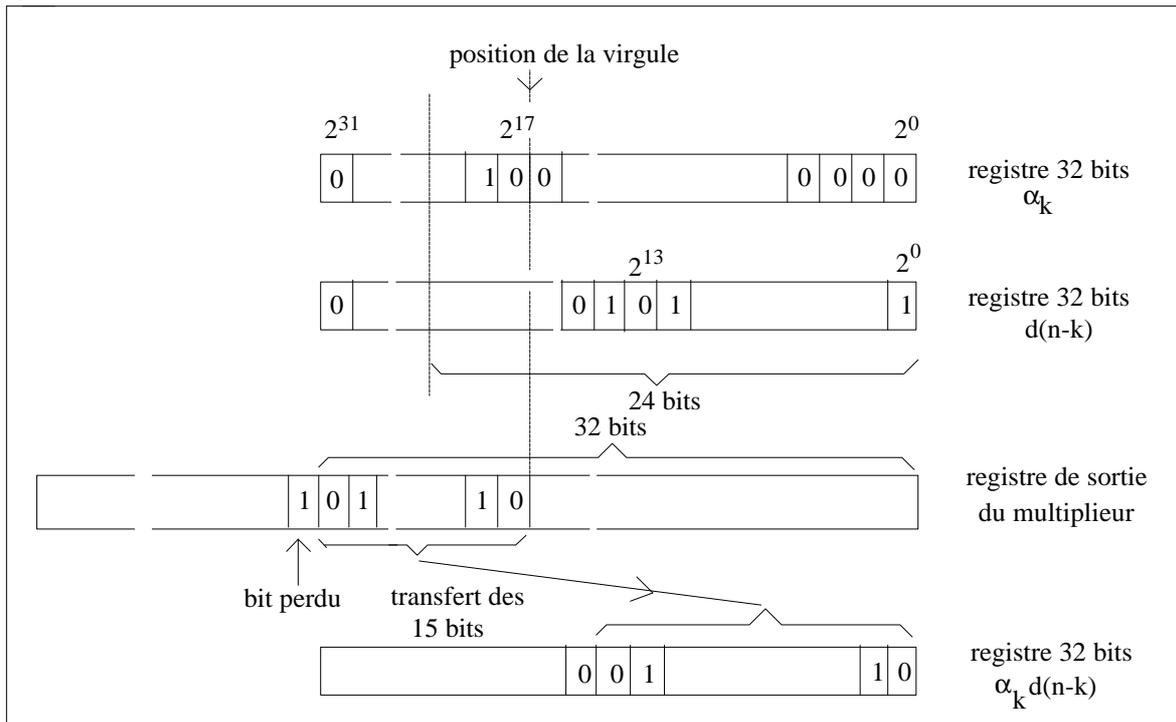


Fig. 50 Multiplication de  $\alpha_k d(n-k)$  et transfert dans un registre

On peut bien sûr minimiser l'erreur en choisissant un format QM plus faible, mais dans ce cas on perd en précision.

Dans le cas où les échantillons présentent une grande dynamique, il est préférable de travailler en virgule flottante (les processeurs à virgule flottante coûtent plus chers que les processeurs à virgule fixe). En général, on utilise le standard IEEE. En simple précision par exemple, le nombre est codé sur 32 bits ; un bit de signe, 8 bits d'exposant non signés et 23 bits pour la partie décimale.

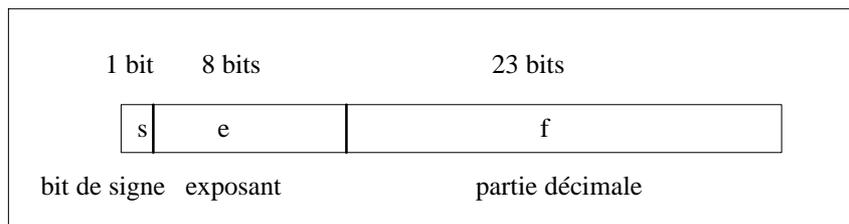


Fig. 51 Standard IEEE en simple précision

La valeur du nombre est déterminé comme suit :  $(-1)^s 1.f 2^{(e-127)}$ .

Le format utilisé par T.I. est différent du standard IEEE, l'exposant est en complément à deux et la place du bit de signe est différente comme le montre la Fig. 52. Pour les calculs internes, aucun format spécifique n'est en fait requis. La norme est seulement intéressante pour échanger des données entre divers supports.

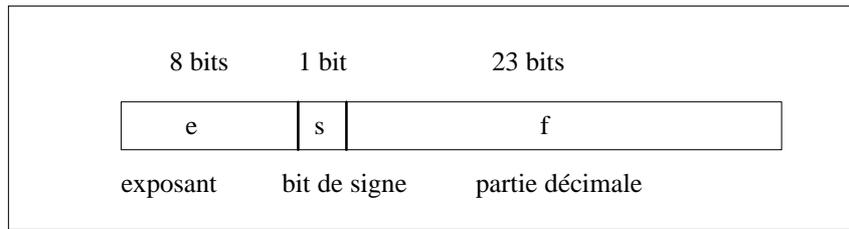


Fig. 52 Format utilisé par TI en simple précision

La valeur du nombre est déterminé comme suit :  $\{(-2)^s + (.f)\} 2^e$ .

Le format IEEE et celui utilisé par T.I. conduisent à une dynamique de  $2^{128}$  ( $3.4 \cdot 10^{38}$ ) à  $2^{-128}$  avec une résolution de 24 bits.

Références :

- 1- Al Lovrich and Ray Simar, Jr., Implementation of FIR/IIR Filters with the TMS32010/TMS32020 *in* Digital Signal Processing Applications with the TMS320 Family, Theory, Algorithms and Implementations, Volume 1, Texas Instruments, 1989.

## annexe I

### Les outils de traitement des signaux numériques

Un système numérique (ex :  $y(n)=[x(n)+x(n-1)]/2$  avec  $x(n)$  et  $y(n)$  les échantillons à l'entrée et à la sortie du système numérique) est caractérisé par : sa réponse impulsionnelle, sa transformée en Z et sa transformée de Fourier numérique. Les transformées en Z et de Fourier numérique sont les équivalents de la transformée de Laplace et de la transformée de Fourier des signaux analogiques. Un système numérique peut être réalisé soit sous forme "hard" (filtre à capacités commutées) soit sous forme "soft" (algorithme de calcul).

#### I- Réponse impulsionnelle d'un système numérique et transformée en Z

##### I-1- Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système numérique est la suite des échantillons  $h(nT_e)$ , par la suite on notera plus simplement  $h(n)$ , obtenus lorsque l'excitation est une simple impulsion d'amplitude égale à l'unité et appliquée à  $t=0$ , on note cette impulsion  $\delta(n)$ .

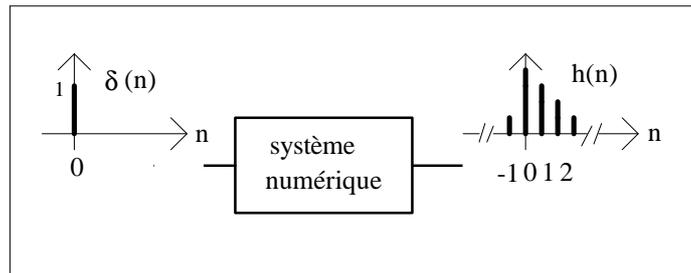


Fig. 1 réponse impulsionnelle d'un système numérique

Comme pour les systèmes analogiques, on peut imaginer des systèmes numériques dont les échantillons  $h(n)$  sont différents de zéro pour  $n < 0$ , ces systèmes sont dits non causaux.

##### I-2- Produit de convolution

On se propose maintenant d'écrire les échantillons  $y(n)$  en sortie d'un système numérique sachant que l'entrée est une suite d'échantillons  $x(n)$ , on suppose, comme en analogique, que le système est **linéaire** et **invariant temporellement**.

À l'impulsion  $x(0)$  appliquée en  $n=0$ , le système répond par la suite d'échantillons  $x(0)h(n)$ , ..., à l'impulsion  $x(k)$  appliquée en  $n=k$  le système répond la suite  $x(k)h(n-k)$ , il s'ensuit que l'échantillon  $y(n)$  s'écrit :

$$y(n) = \dots + x(-1)h(n+1) + x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \dots + x(k)h(n-k) + \dots$$

ou encore :

$$y(n) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(n-k)h(k) \quad (1)$$

en faisant le changement de variable  $(n-k)=u$  puis  $u=k$ .

On note  $y(n)=x(n)\otimes h(n)$ , le symbole  $\otimes$  représente le produit de convolution.

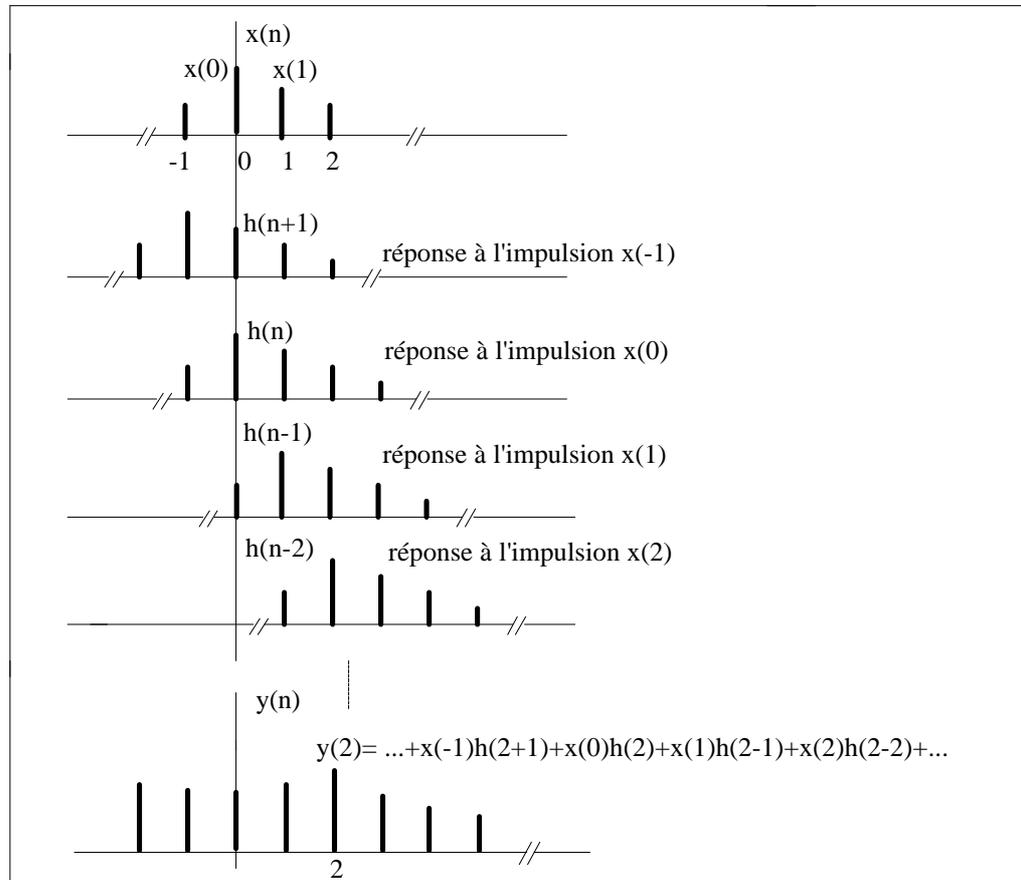


Fig. 2 L'échantillon  $y(n)$  est obtenu par la somme des échantillons  $x(k)h(n-k)$  pour  $k$  allant de  $-\infty$  à  $\infty$

### I-3- Transformée en Z

Comme dans le cas des systèmes analogiques, on cherche une transformée analogue à la transformée de Laplace susceptible de remplacer le produit de convolution par un produit simple. Cette transformée porte le nom de transformée en Z unilatérale, sa définition est la suivante :

$$\text{Transf. en Z des échantillons } y(n) = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} \quad (2)$$

Pour des raisons de convergence, la somme est calculée pour  $n$  allant de zéro à l'infini. La transformée unilatérale ne permet de traiter que le cas des systèmes causaux, c'est à dire ceux dont  $h(n)=0$ , pour  $n<0$ .

#### Exemples de transformées :

1<sup>er</sup> exemple :  $y(n)=\delta(n)$  ; impulsion unité

$$Y(z) = 1z^{-0} + 0 + \dots = 1 \quad (3)$$

2<sup>ème</sup> exemple :  $y(n)=U(n)$  ; échelon,  $y(n)=0$  si  $n<0$ ,  $y(n)=1$  pour  $n=0, 1, 2$ , etc ...

$$Y(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

Il s'agit d'une progression géométrique de raison  $z^{-1}$ , dont la somme s'écrit :

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (4)$$

3<sup>ème</sup> exemple :  $y(n)=U(n)a^n$ , on remarque que cette suite d'échantillons correspond à l'échantillonnage de la fonction  $U(t)e^{-t/\tau}$ . En effet, pour un échantillonnage à la fréquence  $F_e=1/T_e$ , les valeurs des échantillons s'écrivent :

$$y(nT_e) = y(n) = U(nT_e)e^{-nT_e/\tau} = U(n)a^n \quad \text{avec } a = e^{-T_e/\tau}$$

$$Y(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots$$

Il s'agit encore d'une progression géométrique de raison  $az^{-1}$ , dont la somme s'écrit :

$$Y(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (5)$$

Théorème du retard : Si la suite d'échantillons  $y(n)$  a pour transformée  $Y(z)$ , alors la suite d'échantillons retardés  $y(n-k)$  a pour transformée  $Y'(z)=z^{-k}Y(z)$  :

$$\begin{aligned} Y'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n-k)z^{-n} = \sum_{u=-k}^{\infty} y(u)z^{-(k+u)} = z^{-k} \sum_{u=-k}^{\infty} y(u)z^{-u} = z^{-k} \sum_{u=0}^{\infty} y(u)z^{-u} \\ &= z^{-k}Y(z) \quad \text{car } y(u) = 0 \text{ pour } u < 0 \end{aligned} \quad (6)$$

L'équivalent analogique est : si  $H(p)$  est la transformée de  $h(t)$ , alors la transformée de  $h(t-\tau)$  est égale à :  $e^{-p\tau}H(p)$ .

L'introduction de la transformée en  $Z$  permet, comme nous allons le montrer maintenant, de transformer le produit de convolution (1) en un produit simple, prenons donc la transformée en  $Z$  de la suite d'échantillons  $y(n)$  en sortie du système, il vient :

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k) \right] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(k)h(n-k)z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} x(k)h(n-k)z^{-n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} h(n-k)z^{-n} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \left[ \sum_{u=-k}^{\infty} h(u)z^{-(u+k)} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \left[ \sum_{u=-k}^{\infty} h(u)z^{-u} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \left[ \sum_{u=0}^{\infty} h(u)z^{-u} \right] = X(z)H(z) \quad \text{car } h(u) = 0 \text{ pour } u < 0 \text{ pour un système}$$

causal. On obtient donc le résultat important :

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (7)$$

avec  $X(z)$  et  $H(z)$  les transformées en  $Z$  des échantillons d'entrée  $x(n)$  et de la réponse impulsionnelle  $h(n)$ . Cette relation est en tout point analogue à celle obtenue pour les signaux analogiques  $Y(p) = X(p)H(p)$ .

## II- Réponse harmonique d'un système numérique : fonction de transfert isochrone

On s'intéresse au cas où les échantillons  $x(n)$  à l'entrée du système sont du type :  $x(n) = Ae^{j\omega n T_c}$ . On suppose que ces échantillons sont appliqués depuis  $t \rightarrow -\infty$ , en conséquence le régime stationnaire est atteint. Les échantillons  $y(n)$  en sortie sont donnés par le produit de convolution (1), ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} Ae^{j\omega(n-k)T_c} h(k) = Ae^{j\omega n T_c} \sum_{k \rightarrow -\infty}^{k \rightarrow \infty} e^{-j\omega k T_c} h(k) \\ &= x(n)T_n(j\omega) \end{aligned}$$

La quantité complexe  $T_n(j\omega)$  est appelée **fonction de transfert isochrone**, elle renseigne sur le module et la phase des échantillons de sortie. Dans le cas d'un système causal, on obtient :

$$y(n) = x(n)T_n(j\omega) \quad \text{avec} \quad T_n(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega T_c} = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_c}} \quad (8)$$

La fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  est donc obtenue en faisant  $z = e^{j\omega T_c}$  dans  $H(z)$ . La fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  est la transformée de **Fourier numérique** de la réponse impulsionnelle (voir Vol. 4).

L'équivalent analogique de  $T_n(j\omega)$  est  $H(j\omega)$  (ou encore  $H(f)$  : transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle), la réponse en fréquence d'un système analogique. On rappelle que  $H(j\omega)$  est obtenue en faisant  $p = j\omega$  dans  $H(p)$ .

### II-1- Propriétés de la fonction de transfert isochrone d'un système numérique

La fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  présente certaines particularités que nous étudions maintenant.

a) Elle est périodique dans l'espace des fréquences, de période  $F_e$  : la fréquence d'échantillonnage. Pour vérifier ceci, il suffit de montrer que  $T_n(j\omega) = T_n(j(\omega + K\omega_e))$  avec  $K$  un entier quelconque et  $\omega_e = 2\pi F_e$ .

$$T_n(j(\omega + K\omega_e)) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j(\omega + K\omega_e)nT_c} = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n T_c} e^{-jK\omega_e n T_c}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h(n)e^{-j\omega nT_e} = T_n(j\omega) \quad \text{car } e^{-jK_n2\pi} = 1$$

b) Les parties réelle et imaginaire de  $T_n(j\omega)$  sont respectivement paire et impaire, en effet :

$$\text{Partie réelle de } T_n(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cos(n\omega T_e) ; \quad \cos(n\omega T_e) \text{ est une fonction paire en } \omega$$

$$\text{Partie imaginaire de } T_n(j\omega) = - \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \sin(n\omega T_e) ; \quad \sin(n\omega T_e) \text{ est une fonction impaire en } \omega$$

## II-2- Exemples

Nous traitons ci-dessous deux cas de systèmes numériques (filtres numériques), qui illustrent les résultats précédents. La synthèse des filtres numériques, c'est à dire la recherche de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  telle que la fonction de transfert isochrone  $T_n(j\omega)$  obéisse à un certain gabarit, sera abordée après avoir traité les filtres analogiques. Dans cette partie, on se donne la relation de récurrence entrée-sortie et on étudie le comportement de  $T_n(j\omega)$  en fonction de la fréquence, c'est la démarche inverse de la synthèse des filtres.

1<sup>er</sup> cas : un filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie)

Soit donc un filtre numérique dont la relation de récurrence s'écrit :

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-1)}{2} \tag{9}$$

La fonction de transfert en Z de ce filtre est donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{2} \tag{10}$$

Sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  est constituée de deux échantillons non nuls,  $h(0)=1/2$  et  $h(1)=1/2$ . On dit, dans ce cas, qu'il s'agit d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF).

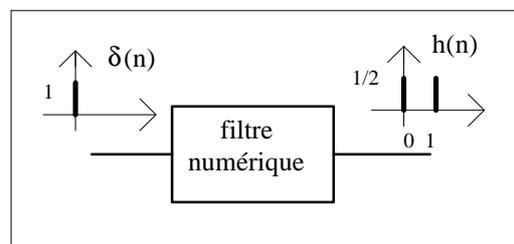


Fig. 3 Réponse impulsionnelle du filtre de relation  $y(n)=[x(n)+x(n+1)]/2$

La fonction de transfert  $T_n(j\omega)$  se met sous la forme :

$$T_n(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{1 + e^{-j\omega T_e}}{2} \quad (11)$$

Les parties réelle et imaginaire, ainsi que le module sont tracés à la Fig. 4, on vérifie bien les symétries prévues précédemment, la fréquence d'échantillonnage  $F_e=1\text{Hz}$ . Le filtre réalisé est un filtre passe-bas.

2<sup>ième</sup> cas : un filtre RII (Réponse Impulsionnelle Infinie)

Soit donc un filtre numérique dont la relation de récurrence s'écrit :

$$y(n) = \frac{x(n) + y(n-1)}{2} \quad (12)$$

La fonction de transfert en Z de ce filtre est donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2 - z^{-1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z^{-1}}{2}} \quad (13)$$

Sa réponse impulsionnelle  $h(n)$  est constituée d'une infinité d'échantillons, en effet la transformée inverse de  $H(z)$  donne les éléments  $h(n)$  suivants :

$$h(n) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \right]^n U(n) \quad (14)$$

Ce type de filtre est appelé filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII). On peut vérifier que  $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \right]^n U(n)z^{-n}$  est une progression géométrique de raison  $a = \frac{1}{2}z^{-1}$ . On rappelle que la somme d'une progression géométrique de raison  $a$  est égale à  $1/(1-a)$ .

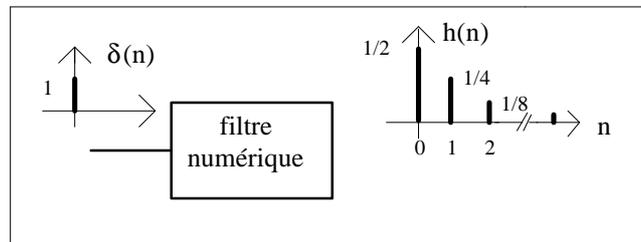


Fig. 5 Réponse impulsionnelle du filtre de relation  $y(n)=[x(n)+y(n-1)]/2$

La fonction de transfert  $T_n(j\omega)$  se met sous la forme :

$$T_n(j\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e^{-j\omega T_e}}{2}} \quad (15)$$

Les parties réelle et imaginaire, ainsi que le module sont tracés à la Fig. 6, on vérifie bien les symétries prévues précédemment, la fréquence d'échantillonnage  $F_e=1\text{Hz}$ . Le filtre réalisé est encore un filtre passe-bas.